Libros de Cátedra

Circuitos Eléctricos

Parte 2

Pablo Morcelle del Valle y Marcos Deorsola

FACULTAD DE
INGENIERÍA

e
exactas





CIRCUITOS ELÉCTRICOS

PARTE 2

Pablo Morcelle del Valle
Marcos Deorsola

Facultad de Ingeniería





Agradecimientos

A los ingenieros Augusto Cassino y Juan Carlos Grimaldi por su colaboración en la realización de los dibujos de circuitos y la realización de los gráficos, respectivamente.

A ambos por sus aportes y sugerencias del texto en general.

Presentación

El presente texto es continuación del libro CIRCUITOS ELÉCTRICOS - Parte 1, editado por EDULP en el año 2017, y sigue la filosofía con la cual aquel fue concebido.

Por lo mencionado, la secuencia en la que están presentados los temas sigue la misma lógica. Los primeros temas abordados en la presente Parte 2 complementan los ya presentados en la Parte 1, mientras que los siguientes incluyen una breve reseña sobre contenidos de electrónica básica que cualquier lector o estudiante que haya adquirido los conocimientos presentados en la Parte 1 puede seguir sin mayores problemas.

Sigue un anticipo sucinto de lo que se verá.

En el capítulo 1 se expone el estudio de la potencia en circuitos de alterna monofásicos, desde su definición hasta el concepto de factor de potencia y su compensación, pasando por la definición de potencia compleja.

El Capítulo 2 presenta el comportamiento de los circuitos alimentados con fuentes senoidales de frecuencia variable, incluyendo el fenómeno de resonancia y una introducción a filtros.

En el Capítulo 3 se analizan los circuitos trifásicos. Se realiza el estudio de la potencia en este tipo de circuitos y cómo es posible realizar su medición, tanto en circuitos de tres como de cuatro hilos. Finalmente se efectúa un estudio introductorio al método de las componentes simétricas para el análisis de circuitos desequilibrados y asimétricos.

El Capítulo 4 sitúa al lector en el estudio de los cuadripolos, desarrollándose las técnicas convencionales de análisis de todas las combinaciones posibles, verificando las ventajas de su aplicación a las diferentes conexiones y los modelos más adecuados para analizar cada caso. Finalmente se efectúa el estudio de los cuadripolos cargados, utilizando las ventajas derivados del estudio general de los mismos.

El Capítulo 5 presenta el estudio de circuitos con señales de tensión y corriente poliarmónicas, analizando las razones por las cuales pueden aparecer este tipo de señales y cómo debe enfrentarse su estudio mediante superposición. También se realiza un estudio detallado de la potencia en este tipo de circuitos.

En el Capítulo 6 se realiza una breve introducción a la electrónica, presentando el diodo rectificador y el tiristor, analizando los circuitos rectificadores típicos y haciendo un análisis del control de potencia en circuitos con carga resistiva y resistiva-inductiva.

El Capítulo 7 continúa con temas de electrónica, presentando el amplificador operacional como un elemento más de un circuito eléctrico y estudiando las configuraciones más comunes, en particular orientadas al tema de estudio del Capítulo 8.

En el Capítulo 8 se estudian los dispositivos transductores más utilizados en la industria, efectuándose estudios previos del puente de Wheatstone y de sistemas de instrumentación asociados a dichos dispositivos.

Finalmente, el Capítulo 9 se efectúa el estudio de los circuitos magnéticos, de importancia para posteriores estudios de las máquinas eléctricas. Se introducen algunos conceptos teóricos derivados del magnetismo hasta el desarrollo de la ley de Hopkinson, planteándose la resolución tanto analítica como gráfica, debido a la característica alineal de los elementos.

Complementan el contenido la obra tres apéndices consistentes en la verificación de la transformación estrella-triángulo de cargas trifásicas, un apartado especial sobre serie de Fourier y un estudio sobre la resolución gráfica de circuitos orientados al análisis de circuitos magnéticos, además de un listado de bibliografía ampliatoria.

Los autores

Índice

CAPÍTULO 1
Potencia y energía en alterna

La importancia del estudio de potencia y la energía en circuitos eléctricos radica en dos aspectos fundamentales: la *transformación* y la *medición*.

En el primer caso, la *transformación* se refiere a la utilización de la energía eléctrica con el objeto de ser aprovechada con fines prácticos. Este enfoque permite efectuar previsiones relacionadas con la disponibilidad de energía y cómo ésta es procesada en los diferentes tipos de cargas.

La *medición* de la potencia o de la energía tiene entre sus implicancias más importantes la facturación de la energía eléctrica, así como la administración de las instalaciones en función de la distribución más adecuada de las cargas en los diferentes componentes del sistema.

Por otra parte, al final del Capítulo 2 del primer libro [1], se estudiaron generalidades de la potencia y la energía en el ámbito de la electricidad. Los conocimientos allí adquiridos se usan en el presente capítulo para analizar dichas magnitudes en los componentes pasivos cuando la excitación aplicada a los mismos es alterna senoidal, señal que en particular para $f = 50\ \mathrm{Hz}$ es la usada en la generación, transmisión y distribución de la electricidad en Argentina.

Se estudian los fundamentos que dan origen a las herramientas de cálculo relacionadas con la potencia en general, y de los gráficos que permiten relacionar conceptos asociados a la energía en circuitos eléctricos.

Se presentan además los conceptos del *triángulo de "potencias"* y del *factor de potencia* y se explica en qué condiciones la *transformación* de energía de la fuente en los componentes pasivos es más eficiente.

Finalmente se realiza la presentación del instrumento que permite efectuar la medición de la potencia en circuitos eléctricos.

1.1 Introducción

La sección 2.5 (a partir de la página 30 de [1]) presenta una exposición general de la potencia y la energía en circuitos eléctricos. En la misma se anticipa cómo se determinan ambas magnitudes cuando las tensiones y las corrientes son variables en el tiempo.

En este capítulo se estudia la potencia y la energía cuando las señales de las fuentes de tensión y/o corriente que activan los componentes pasivos son alternas senoidales. El estudio se realiza a partir del análisis y las conclusiones de la sección 2.5 mencionada y aplicando las fórmulas resultantes. Respecto a las señales alternas senoidales, es conveniente tener en cuenta lo ya visto en el capítulo 4 de [1].

Como es bien sabido la potencia es la derivada temporal de la energía, de modo que conocida la primera, por integración en el tiempo de la misma se conoce la segunda,

Antes de iniciar el estudio se señalan algunos aspectos, según que el componente sea o no sea reactivo y se analizan un par de situaciones provenientes de traducciones del idioma inglés.

En el caso del resistor, tanto la causa como la consecuencia del funcionamiento del mismo siempre resultan *en fase*, mientras que en el caso de los dos reactivos siempre resultan *en cuadratura*.

Aparece un detalle idiomático asociado a estas dos situaciones, puesto que la palabra ***fase*** en inglés se expresa ***phase*** mientras que ***cuadratura*** se dice ***quadrature***. Este detalle determina que aparezcan subíndices en la nomenclatura para la distinción de la potencia y la energía eléctrica en cada tipo de componente pasivo, lo cual está relacionado con las iniciales de los términos del idioma inglés mencionados.

El estudio de las magnitudes en cuestión en cada componente pasivo, resistor, inductor y capacitor se realiza inicialmente con los mismos conectados en paralelo y activados por una tensión, tal como sigue.

1.2 Potencia y energía en el circuito paralelo

Esta elección inicial es consecuencia de que en la realidad, como ya se comentó en el estudio de las fuentes, lo usual es disponer fuentes de tensión a las cuales resulta práctico conectarle elementos pasivos justamente en paralelo.

O sea, considerando el circuito de la Figura 1-1 alimentado por una tensión alterna senoidal $u_f(t) = U_{máx}\, cos(\omega t)\ \mathrm{V}$, el análisis de la potencia instantánea en cada elemento pasivo, representado por sus habituales características eléctricas G, L, y C, permitirá luego determinar la variación en el tiempo de la energía en la fuente de tensión que se transforma en cada uno de dichos componentes.

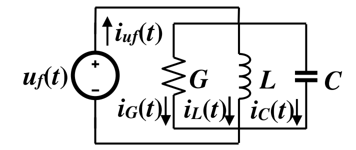


Figura 1-1: Circuito paralelo para el estudio de la potencia y energía con señal alterna senoidal

Para graficar las expresiones que irán resultando se consideran los siguientes valores: $U_{máx} = 10\,\text{V}$, $\omega = 2\cdot\pi\cdot 50\,\text{rad/s}$, $G = 0{,}5\,\text{S}$, $B_L = (\omega L)^{-1} = 0{,}3\,\text{S}$ y $B_C = \omega C = 0{,}1\,\text{S}$.

En la sección 1.2.3 se analiza la incidencia en algunos resultados si, para el estudio, la señal de la fuente de tensión fuera seno y no coseno.

1.2.1 Potencia y energía en el resistor (G), no reactivo

- Para la potencia $p_G(t)$

La segunda fila de la Tabla 2.1 en la página 31 de [1], da la fórmula para el cálculo de la potencia cuando se activa un resistor, en su característica conductiva (G), con una tensión variable en el tiempo.

Así resulta la expresión de la Ec. 1-1 para dicha potencia teniendo en cuenta que $cos^2(\omega t) = \frac{[1+cos(2\omega t)]}{2}$ y que para señales senoidales $\frac{U_{máx}^2}{2} = U_{ef}^2$ [1].

$$p_G(t) = u_f(t)^2 \cdot G = U_{máx}^2 G\cdot cos^2(\omega t) = U_{máx}^2 G\cdot\frac{[1+cos(2\omega t)]}{2} = U_{ef}^2 G\cdot[1+cos(2\omega t)] \qquad \text{Ec. 1-1}$$

La anterior muestra que $p_G(t)$ tiene un valor medio al que se suma una oscilación senoidal de pulsación 2ω.

Dicho valor medio resulta el de la Ec. 1-2

$$\overline{p_G(t)} = U_{ef}^2 G = \text{P} \qquad \text{Ec. 1-2}$$

Y la misma muestra que en el resistor, que por ejemplo podría ser el modelo representativo de un dispositivo electromecánico, la variación media de la energía en el tiempo es no nula y puntualmente constante. Esta característica de P es también indicativa que habrá energía continuamente transformándose en este componente de circuito.

Por otro lado la expresión de la Ec. 1-2 también vale para cualquier forma de variación de la tensión inclusive constante[2].

La oscilación se obtiene realizando

---

[1] El valor U_{ef} se sobreentiende que es el de la fuente u_f pero sin el subíndice f para sencillez de la escritura. Aclaración que también vale para el pie de página [2].

[2] $\overline{p_G(t)}$ puede calcularse en general como $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_f(t)^2\cdot G\cdot dt = \frac{G}{T}\int_t^{t+T} u_f(t)^2\cdot dt = G\cdot U_{ef}^2$

$$p_G(t) - \overline{p_G(t)} = U_{ef}^2 G \cdot cos(2\omega t) = P \cdot cos(2\omega t) = p_{p_G}(t) \qquad \text{Ec. 1-3}$$

Esta potencia oscilante es consecuencia de ser la tensión (causa) y la corriente (consecuencia) señales senoidales (o sea oscilantes) y su expresión es la de la Ec. 1-3, sabiendo que la corriente está en fase con la tensión. Como se anticipara en el final de la Introducción 1.1 para marcar este último detalle se utiliza p (de *phase*) como subíndice para la identificación de dicha potencia oscilante, más la referencia al enfoque del componente no reactivo en estudio (G), tal como se ve al final de la Ec. 1-3.

Respecto del valor máximo de la oscilación, si bien coincide numéricamente con el resultado de la Ec. 1-2 no representa físicamente lo mismo, razón por la cual, para distinguirlo del valor medio P , se utiliza formato de letra cursivo P .

O sea, la letra p , tanto minúscula como mayúscula, indica potencia (coincide tanto en español como en inglés como inicia su denominación) y en caso de subíndice, como ya se dijo representa en fase. La normalización en Argentina acepta esta nomenclatura

En resumen la Ec. 1-1 puede volver a escribirse:

$$p_G(t) = \mathrm{P} + P \cdot cos(2\omega t) = \mathrm{P} + p_{p_G}(t) \qquad \text{Ec. 1-4}$$

Y finalmente, la unidad de medida, que ya se sabe es el watt $[\mathrm{W}]$.

- Para la energía $w_G(t)$

El último cuadro de la Tabla 2-1, muestra la correspondiente fórmula para determinar la energía a medida que el tiempo transcurre desde que se aplica la tensión. Como se analiza en el párrafo inmediato a dicha tabla $w_G(t)$ deberá ser creciente con el tiempo y como el resistor es un elemento en el cual la transformación energética es irreversible, o sea no es conservativo, en dicho elemento la energía inicial debe ser nula.

Teniendo en cuenta la primera parte de la formula ya referida y las aclaraciones realizadas:

$$w_G(t) = \int_0^t p_G(t) \cdot dt = \int_0^t \left[\mathrm{P} + P \cdot cos(2\omega t)\right] \cdot dt = \mathrm{P} \cdot t + \frac{P}{2\omega} \cdot sen(2\omega t) \qquad \text{Ec. 1-5}$$

La Ec. 1-5 muestra dos términos: $\overline{w_G(t)} = \mathrm{P} \cdot t$ y $w_{p_G}(t) = \frac{P}{2\omega} \cdot sen(2\omega t)$. Como se anticipara, el valor medio de la energía es linealmente creciente con el tiempo con pendiente igual al valor medio de $\overline{p_G(t)} = \mathrm{P}$, indicado en la Ec. 1-2. El segundo término es una oscilación de pulsación 2ω y que, por surgir a partir de $p_{p_G}(t)$, también se identifica con el subíndice $w_{p_G}(t)$.

La unidad de medida de la energía corresponde al ya conocido joule $[\mathrm{J}]$.

- Representaciones gráficas.

En la página siguiente, la Figura 1-2 muestra los resultados asociados a $p_G(t)$ y la Figura 1-3 los correspondientes a $w_G(t)$.

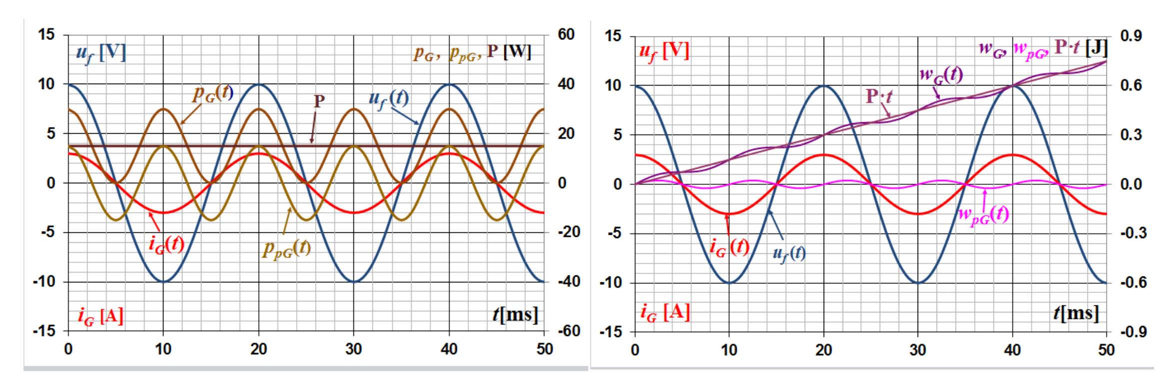


Figura 1-2: gráficas de $u_f(t)$, $i_G(t)$, $p_G(t)$, $p_{p_G}(t)$ y $\overline{p_G(t)} = \mathrm{P}$

Figura 1-3: gráficas de $u_f(t)$, $i_G(t)$, $w_G(t)$, $w_{p_G}(t)$ y $\overline{w_G(t)} = \mathrm{P} \cdot t$

Las representaciones anteriores merecen los siguientes comentarios e indicaciones.

La potencia $p_G(t)$ (suma de P y $p_{p_G}(t)$) resulta de pulsación doble de la de la fuente y siempre es positiva, lo que implica que la energía en el resistor sea siempre creciente aunque en forma ondulada (suma de $\mathrm{P} \cdot t$ y $w_{p_G}(t)$). O que, cumpliendo el principio de conservación de la energía, ésta disminuirá de la misma forma (en este caso en la fuente de tensión), siendo en la misma la potencia negativa.

Debe recordarse que los elementos activos (las fuentes) son tales por disponer de energía inicial a partir de la cual se da la comentada disminución. Por otra parte esta energía que disminuye en la fuente se transforma en trabajo en aumento en el componente pasivo.[3]

Por último no debe desatenderse $p_{p_G}(t)$ (ondulación con valor medio nulo causante de la correspondiente $w_{p_G}(t)$), teniendo presente otra vez que su identificación por el subíndice p se refiere a que surge por estar la corriente consecuencia en fase (***phase***) con la tensión causa, ya que será tenido en cuenta una vez estudiada la potencia en los elementos reactivos (con la corriente en cuadratura con la tensión).

1.2.2 Potencia y energía en el inductor (L), reactivo. Potencia reactiva Q_L

- Para la potencia $p_L(t)$

En este caso la Tabla 2-2 de la sección 2.5.2 en la página 32 de [1], indica que $p_L(t) = i(t) L \dfrac{di(t)}{dt} = i_L(t) \cdot u_L(t)$.

Dado que $u_L(t) = u_f(t)$ y siendo la corriente $i_L(t) = U_{máx} B_L sen(\omega t)\ \mathrm{A}$ resulta:

[3] Se sugiere repasar las secciones 2.5.3 y 2.5.4 de [1]

$$p_L(t) = U_{máx}^2 B_L \cdot cos(\omega t) \cdot sen(\omega t) = \frac{U_{máx}^2 B_L}{2} \cdot sen(2\omega t) = U_{ef}^2 B_L \cdot sen(2\omega t) \qquad \text{Ec. 1-6}$$

La Ec. 1-6 muestra una oscilación senoidal de pulsación 2ω, comprobándose que $\overline{p_L(t)} = 0$. Además se aprecia que, consecuencia del desfasaje $\pi/2$ entre corriente y tensión, esta oscilación está también en cuadratura con la de la Ec. 1-3.

Teniendo en cuenta lo ya anticipado respecto al inicio de la palabra cuadratura con ***q*** en inglés y por analogía a los comentarios ya hechos entre la Ec. 1-3 y la Ec. 1-4, la nomenclatura para el máximo de $p_L(t)$ es $U_{ef}^2 B_L = Q_L$, se escribe con letra cursiva y el subíndice denota que el componente es inductivo.

También, y dado que la potencia $p_L(t)$ tiene valor medio nulo:

$$p_L(t) = Q_L sen(2\omega t) = p_{q_L}(t) \qquad \text{Ec. 1-7}$$

Respecto a Q_L, suele denominarse convencionalmente como *potencia reactiva* por tener que ver con dicho tipo de elemento circuital y tiene como unidad de medida el *volt ampere reactivo* $[\text{var}]$.[4]

- Para la energía $w_L(t)$

La ya mencionada Tabla 2-2 indica para determinar la energía desde que hay corriente:

$$w_L(t) = w_L(0) + \int_0^t p_L(t) \cdot dt \qquad \text{Ec. 1-8}$$

Como el inductor es un elemento en el cual las transformaciones energéticas son reversibles, o sea conservativo, ya se sabe que la energía inicial podría ser no nula según el valor de la corriente en ese instante. En el caso en estudio, dado que $i_L(0) = 0$, resulta $w_L(0) = \frac{1}{2} L i_L(0)^2 = 0$ por lo que la Ec. 1-8 se desarrolla:

$$w_L(t) = \int_0^t p_{q_L}(t) \cdot dt = \int_0^t Q_L sen(2\omega t) \cdot dt = \frac{Q_L}{2\omega}\left[1 - cos(2\omega t)\right] \qquad \text{Ec. 1-9}$$

Obviamente la anterior expresión se puede verificar a partir de $w_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2(t)$, y en cualquiera de los casos comprobar que $\overline{w_L(t)} = \frac{Q_L}{2\omega}$ al que se suma una oscilación $w_{q_L}(t) = -\frac{Q_L}{2\omega} \cdot cos(2\omega t)$.

- Representaciones gráficas.

Al igual que antes, la Figura 1-4 muestra los resultados relacionados con $p_L(t)$ y la Figura 1-5 los correspondientes a $w_L(t)$.

[4] La explicación del [var] se fundamenta en el apéndice A de [1], pagina 121.

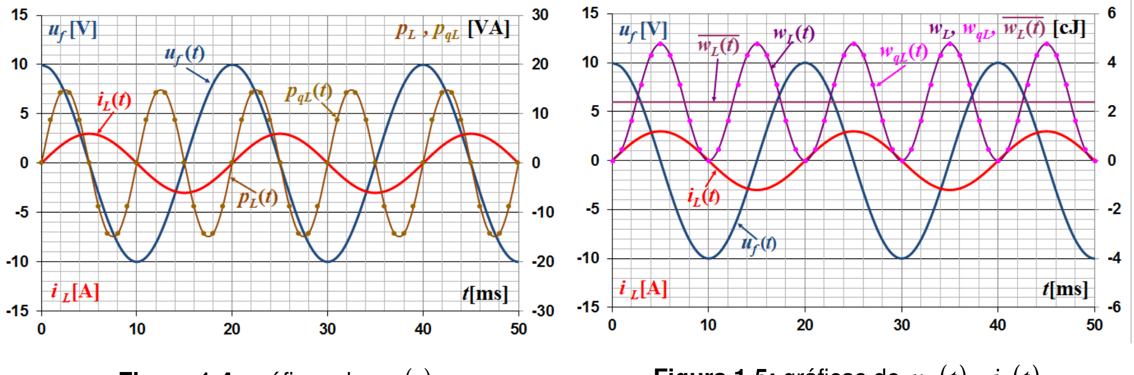


Figura 1-4: gráficas de $u_f(t)$, $i_L(t)$, $p_L(t) = p_{q_L}(t)$,

Figura 1-5: gráficas de $u_f(t)$, $i_L(t)$, $w_L(t) = w_{q_L}(t)$ y $\overline{w_L(t)}$

De las gráficas anteriores surgen las siguientes conclusiones particulares.

Con la aclaración de que en las curvas de la Figura 1-4 se dibujaron solo algunos puntos de $p_{q_L}(t)$, se aprecia que la potencia $p_L(t) = p_{q_L}(t)$ oscila de positivo a negativo y con valor medio nulo.

Sin embargo la energía en el inductor es ondulante y, como no puede ser de otra manera, siempre positiva. Cuando $p_L(t) > 0$ dicha energía es creciente y decreciente cuando $p_L(t) < 0$, resultando el valor medio constante.

Esta energía, cuyo valor crece y decrece en el inductor, debe también satisfacer el correspondiente principio de conservación, por lo que una disminución y aumento de la misma debe darse en la fuente de tensión.

Ahora, esta situación de variación en el tiempo de la energía con valor medio constante sólo es propia de los elementos reactivos (más adelante se podrá comprobar para el capacitor) por lo que podría asignarle justamente a esta energía el adjetivo de *reactiva*.

Por otra parte ya se vio que para la parte no reactiva (por no ser conservativa), la energía crece linealmente con el tiempo y no es necesario adjetivo para referirse a ella y es la que se transforma irreversiblemente en trabajo e inevitablemente en calor.

Es interesante la analogía de la disminución del valor de la energía reactiva en el inductor y correspondiente aumento en la fuente la fuente, y viceversa con la oscilación ideal del péndulo mecánico en relación con la variación entre la energía cinética y la potencial, resultando también conservativo en este aspecto este dispositivo.

Así, teniendo en cuenta lo anterior, un aumento de la energía reactiva en el inductor implica una disminución de ese tipo de energía en la fuente e inversamente. En consecuencia, en este elemento activo, en su versión real, debe haber una parte que permita esta característica energética. Más detalles escapan al conocimiento actual de la mayoría de los lectores de este tipo de texto y que son propios de la generación de la electricidad.

Es interesante el resultado de reemplazar el valor máximo de $p_L(t) = p_{q_L}(t)$ en $\overline{w_L(t)}$ como muestra la operación siguiente.

$$\overline{w_L(t)} = \frac{Q_L}{2\omega} = \frac{U_{ef}^2 B_L}{2\omega} = \frac{I_{L_{ef}}^2}{2\omega B_L} = \frac{I_{L_{ef}}^2 \omega L}{2\omega} = \frac{I_{L_{ef}}^2 L}{2} \qquad \text{Ec. 1-10}$$

El final de la Ec. 1-10 manifiesta que:

si hay corriente en el inductor, hay energía media en el mismo

También es notable que la forma de variación de la energía en el inductor (componente reactivo) es análoga a la forma de variación de la potencia en el resistor (componente no reactivo).

1.2.3 Potencia y energía en el capacitor (C), reactivo. Potencia reactiva Q_C

- Para la potencia $p_C(t)$

Para este componente, nuevamente la ya mencionada Tabla 2-2 de la sección 2.5.2 en la página 32 de [1], indica que $p_C(t) = u(t) C \frac{du(t)}{dt} = u_C(t) i_C(t)$ y repitiendo el procedimiento seguido en la sección 1.2.2 para el inductor resultan los pasos siguientes.

Dado que $u_C(t) = u_f(t)$ e $i_C(t) = -U_{máx} B_C \cdot cos(\omega t)$, entonces:

$$p_C(t) = -U_{máx}^2 X_C \cdot sen(\omega t) \cdot cos(\omega t) = -\frac{U_{máx}^2 B_C}{2} \cdot sen(2\omega t) = -U_{ef}^2 B_C \cdot sen(2\omega t) \qquad \text{Ec. 1-11}$$

Otra vez la Ec. 1-11 muestra una oscilación senoidal de pulsación 2ω y que $\overline{p_C(t)} = 0$ También se aprecia que dicha oscilación está en cuadratura con la de la Ec. 1-3 y además de estar en contrafase respecto de la expresión de la Ec. 1-6.

En este caso el máximo de $p_C(t)$ es $U_{ef}^2 B_C = Q_C$ valiendo los mismos comentarios realizados para Q_L, tanto para nomenclatura como para unidad de medida y determinando en definitiva

$$p_C(t) = -Q_C \cdot sen(2\omega t) = p_{q_C}(t) \qquad \text{Ec. 1-12}$$

- Para la energía $w_C(t)$

Como en el caso del inductor, la energía en el capacitor se determina a partir de la Ec. 1-12 como sigue:

$$w_C(t) = w_C(0) + \int_0^t p_C(t) \cdot dt \qquad \text{Ec. 1-13}$$

También el capacitor es un elemento conservativo por lo que la energía inicial podría ser no nula según el valor de la tensión en dicho componente en ese instante. En este caso dado que $u_C(0) = U_{máx}$ y $w_C(0) = \frac{1}{2} C u_C^2(0)$, resulta $w_C(0) = \frac{C \cdot U_{máx}^2}{2} = C \cdot U_{C_{ef}}^2 = \frac{Q_C}{\omega}$.

En realidad esta energía debe estar presente en el capacitor en el momento de aplicar la tensión de la fuente para evitar que haya transitorio, o sea debe tener carga eléctrica sumi-

nistrada por otra fuente, con la consiguiente disminución de energía en la misma por el valor $w_C(0)=\dfrac{Q_C}{\omega}$ más arriba obtenido.

Si la tensión de la fuente fuera una función seno, el valor inicial sería nulo al igual que su energía inicial y no necesitaría estar cargado. Sin embargo esta opción habría generado todo este último comentario del capacitor en el estudio del inductor. Si la tensión se aplica en el inicio con una cierta fase ambos componentes deberían tener energía en el momento de dicha aplicación (recordar campo magnético en el inductor y campo eléctrico en el capacitor).

Volviendo a la Ec. 1-13, ésta se desarrolla:

$$w_C(t)=\frac{Q_C}{\omega}+\int_0^t p_{q_C}(t)\cdot dt=\frac{Q_C}{\omega}-\int_0^t Q_C\cdot sen(2\omega t)\cdot dt=\frac{Q_C}{2\omega}\left[1+cos(2\omega t)\right]=w_{Q_C}(t) \qquad \text{Ec. 1-14}$$

Con carácter semejante al inductor, la Ec. 1-14 también se verifica a partir de $w_C(t)=\frac{1}{2}C\cdot u_f^2(t)$, resultando $\overline{w_C(t)}=\dfrac{Q_C}{2\omega}$ con el agregado de una oscilación $w_{q_C}(t)=\dfrac{Q_C}{2\omega}\cdot cos(2\omega t)$.

- Representaciones gráficas.

La Figura 1-6 muestra los aspectos de $p_C(t)$ y la Figura 1-7 los de $w_C(t)$.

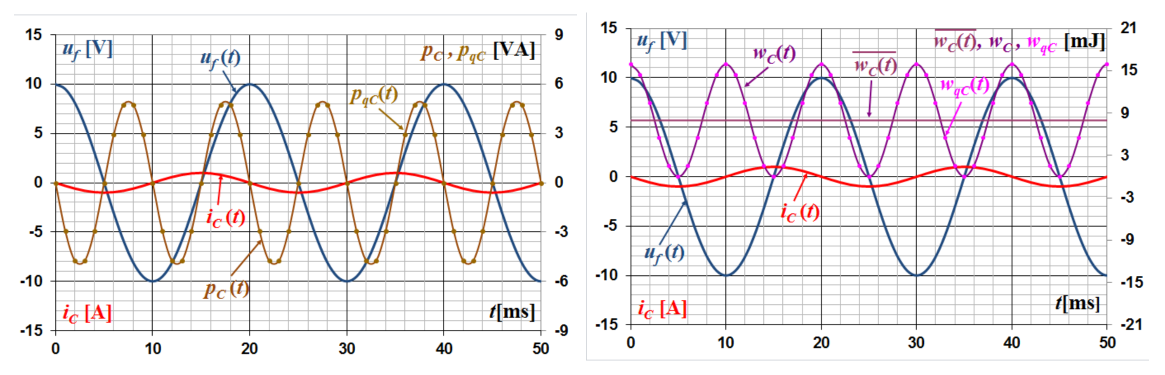


Figura 1-6: gráficas de $u_f(t)$, $i_C(t)$ y $p_C(t)=p_{q_C}(t)$

Figura 1-7: gráficas de $u_f(t)$, $i_C(t)$, $w_C(t)=w_{q_C}(t)$ y $\overline{w_C(t)}$

Valen los detalles y conclusiones hechas a posteriori de las Figuras 1-4 y 1-5 para la potencia y la energía en el inductor en forma análoga para la potencia y energía en el capacitor, pero con referencia a las gráficas de las Figuras 1-6 y 7-7 y teniendo en cuenta el detalle de la energía inicial en este caso.

También se da la característica particular de oscilación de la energía ya vista en el estudio del inductor, validando todo lo dicho respecto de la energía reactiva y su interacción con la fuente de tensión.

Repitiendo el procedimiento hecho en la Ec. 1-10 para el inductor, se cumple el desarrollo y resultado mostrado en la siguiente Ec. 1-14 para el capacitor en estudio.

$$\overline{w_C(t)} = \frac{Q_C}{2\omega} = \frac{U_{ef}^2 B_L}{2\omega} = \frac{U_{ef}^2 \omega C}{2\omega} = \frac{U_{ef}^2 C}{2} \qquad \text{Ec. 1-14}$$

Esta última expresión permite la siguiente afirmación:

si hay tensión en el capacitor, hay energía media en el mismo

Antes de considerar el circuito completo y avanzar en aspectos particulares del tema en cuestión, la Tabla 1-1 resume las expresiones más significativas de la potencia y la energía en los tres componentes estudiados en las secciones 1.2.1, 1.2.2 y.1.2.3, Vale recordar que, por estar conectados en paralelo, los mismos tienen la misma tensión de la fuente.

Un poco de atención en las fórmulas de las dos filas de los componentes reactivos permite verificar el concepto de **dualidad**, desarrollado en la sección 3.5 de la página 60 de [1].

Tabla 1-1: Expresiones de la potencia y la energía en resistor, inductor y capacitor en paralelo excitados por una misma tensión alterna cosenoidal

	Potencia	Energía
Resistor (G)	$p_G(t) = \mathrm{P} + P \cdot cos(2\omega t)$ $\overline{p_G(t)} = \mathrm{P} = U_{ef}^2 \cdot G$ $P = U_{ef}^2 \cdot G$ $p_{p_G}(t) = P \cdot cos(2\omega t)$	$w_G(t) = \mathrm{P} \cdot t - \frac{P}{2 \cdot \omega} \cdot sen(2\omega t)$ $\overline{w_G(t)} = \mathrm{P} \cdot t$ $w_{p_G}(t) = -\frac{P}{2\omega} \cdot sen(2\omega t)$
Inductor (L)	$p_L(t) = p_{q_L}(t) = Q_L \cdot sen(2\omega t)$ $Q_L = U_{ef}^2 \cdot B_L$ $\overline{p_L(t)} = 0$	$w_L(t) = \frac{Q_L}{2 \cdot \omega} \cdot \left[1 - cos(2\omega t)\right]$ $\overline{w_L(t)} = \frac{Q_L}{2\omega} = \frac{I_{L_{ef}}^2 L}{2}$ $w_{q_L}(t) = -\frac{Q_L}{2\omega} \cdot cos(2\omega t)$
Capacitor (C)	$p_C(t) = p_{q_C}(t) = -Q_C \cdot sen(2 \cdot \omega \cdot t)$ $Q_C = U_{ef}^2 \cdot B_C$ $\overline{p_C(t)} = 0$	$w_C(t) = \frac{Q_C}{2 \cdot \omega} \cdot \left[1 + cos(2\omega t)\right]$ $\overline{w_C(t)} = \frac{Q_C}{2\omega} = \frac{U_{ef}^2 C}{2}$ $w_{q_C}(t) = \frac{Q_C}{2\omega} \cdot cos(2\omega t)$

1.2.4 Potencia y energía en el circuito completo (G, L y C). Triángulo de potencia. Potencia aparente S. Factor de Potencia FP.

Si se considera el conjunto de los tres componentes, el no reactivo (G) y los dos reactivos (L y C), la energía total en dicho conjunto se obtiene a partir de la suma de la energía en cada componente, es decir $w_T(t) = w_G(t) + w_L(t) + w_C(t)$.

Atendiendo las expresiones de cada término anterior resumidas en la Tabla 7-1 y un poco de álgebra da por resultado la fórmula de la Ec. 1-15.

$$w_T(t) = \mathrm{P} \cdot t - \frac{P}{2\omega} \cdot sen(2\omega t) + \left(\frac{Q_L + Q_C}{2\omega}\right) - \left(\frac{Q_L - Q_C}{2\omega}\right) \cdot cos(2\omega t) \qquad \text{Ec. 1-15}$$

Tanto el producto $p_T(t) = u_f(t) \cdot i_T(t)$ (derivada temporal de la Ec. 1-15), como $p_T(t) = p_G(t) + p_L(t) + p_C(t) = \mathrm{P} + p_{p_G}(t) + p_{q_L}(t) + p_{q_C}(t)$ (suma de la potencia en cada uno de los componentes pasivos), coinciden en la Ec. 1-16 para la potencia total.

$$p_T(t) = \mathrm{P} + P \cdot cos(2\omega t) + (Q_L - Q_C) \cdot sen(2\omega t) \qquad \text{Ec. 1-16}$$

Inevitablemente, el último sumando de la anterior expresión hace que tenga tramos periódicos negativos coincidentes cuando en los valores de $u_f(t)$ e $i_T(t)$ tienen signos contrarios. En el ejemplo de la sección 1.6.3 se hará notar esta situación

Por otra parte, tanto en la Ec. 1-15 como en la Ec. 1-16 se aprecia la ya anticipada acción en contrafase de los dos elementos reactivos en la resta de $Q_L - Q_C$, diferencia que aparece en el máximo de la potencia y la energía oscilante total reactiva. Según sea el valor de cada máximo individual la resta en cuestión, denominada Q, puede ser positiva, nula o negativa.

Para ver la implicancia de estos posibles resultados es útil repasar el diagrama fasorial de la tensión aplicada y las corrientes resultantes en cada uno de los componentes pasivos y el triángulo de admitancia del circuito en estudio.

Ambos detalles, y para los valores numéricos ya indicados a posteriori de la Figura 1-1, se muestran respectivamente en las Figuras 1-8 y 1-9. Es obvio que ϕ es el ángulo de desfasaje entre la tensión de la fuente y la corriente en dicha fuente.

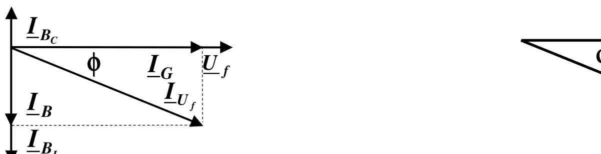


Figura 1-8: Diagrama fasorial

Figura 1-9: Triángulo de admitancia

Vistos el diagrama fasorial y el triángulo de admitancia señalados más arriba ¿cuál es el resultado de modificar la escala del triángulo de admitancia si sus lados se multiplican dos veces consecutivas por U_{ef}, valor eficaz de la tensión de la fuente? Antes de responder, es necesario tener en cuenta que U_{ef} es un escalar y que los triángulos resultantes son todos semejantes con escalas de medida modificadas, uno por U_{ef}, y otro por su cuadrado.

La respuesta se muestra en las Figuras 1-10 y 1-11.

$U_{ef}G = I_{G_{ef}}$

$U_{ef}B = I_{B_{ef}}$

ϕ

$U_{ef}Y = I_{U_{ef}}$

Figura 1-10: Triángulo de admitancia multiplicado por U_{ef}

$U_{ef}I_{G_{ef}} = U_{ef}^2 G = P$

$U_{ef}I_{B_{ef}} = U_{ef}^2 B = Q$

ϕ

$U_{ef}I_{U_{ef}} = U_{ef}^2 Y = S$

Figura 1-11: Triángulo de admitancia multiplicado por U_{ef}^2

El triángulo de la Figura 1-10 es una versión de valores eficaces de las corrientes del diagrama fasorial de la Figura 1-8 donde se verifica la ya conocida relación $I_{U_{ef}}^2 = I_{G_{ef}}^2 + I_{B_{ef}}^2$.

El triángulo de la Figura 1-11 relaciona en los catetos el valor máximo de las potencias oscilantes que se dan en los dos tipos de elementos pasivos: P (no reactivo, corriente y tensión en fase -***phase***, cateto adyacente) y Q (reactivo total, corriente y tensión en cuadratura -***quadrature***, cateto opuesto)[5]. La hipotenusa, que vale $U_{ef}I_{U_{ef}}$, se denomina ***potencia aparente*** y se identifica con S .

Este nuevo triángulo es designado tradicionalmente como ***triángulo de "potencia"***, donde el encomillado es para marcar que los catetos se refieren a los máximos de las potencias oscilantes como ya se explicó.

A juicio de los autores los significados asignados a los catetos son más coherentes, para la conformación del triángulo, que algunas denominaciones habituales siguientes:

- Cateto opuesto, **potencia reactiva** a secas, que puede entenderse como equivalente reactivo a P , cuando ya se demostró que $\overline{p_q(t)} = 0$.
- Cateto adyacente, **potencia activa**, siendo la aclaración activa reservada a las fuentes de tensión y/o corriente en contraposición a los pasivos[6] y considerado físicamente como P (aunque dado que siempre el valor numérico de P es idéntico al valor numérico de P , conocer este máximo implica conocer la potencia media).

Pitágoras y la trigonometría en la Figura 1-11 dan las fórmulas de la Tabla 1-2 que sigue a las que se agregan las respectivas unidades de medida:

Tabla 1-2: Expresiones derivadas del triángulo de "potencia"

$S = U_{ef}\ I_{U_{ef}} = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $[\mathrm{VA}]$	$P = U_{ef}^2 \cdot G = S \cdot cos(\phi)$ $[\mathrm{W}]$	$Q = U_{ef}^2 \cdot B = S \cdot sen(\phi)$ $[\mathrm{var}]$

5 La coincidencia, en inglés, respecto a la igual letra inicial de *phase* y *power* no debería confundir significados. Para la fase es minúscula y subíndice. Para los componentes reactivos, por analogía, valen minúscula para *quadrature* y mayúscula para máximo de potencia reactiva.

6 Ver sección 2-1, pág. 17, y sección 2-3, pág. 21, de [1]

Volviendo a la potencia total de la Ec. 1-16, el valor medio de la misma sigue siendo P y existe siempre que haya un elemento no reactivo (no conservativo respecto a la energía) en el que la corriente consecuencia está en fase con la tensión causa. Como ya se explicó, esta potencia además es la responsable de que exista energía creciente en el tiempo en el circuito pasivo con la consecuente igual forma de disminución de la energía en la fuente de tensión (parte activa).

Esta transformación de energía eléctrica, en la mayoría de los casos en trabajo, se da con una corriente en la fuente de tensión (que también es la misma en los conductores de conexionado) según indica la ya conocida expresión $\underline{I}_{U_f} = \underline{U}_f \cdot \left[G + j \cdot (B_C - B_L)\right]$.

La acción a contrafase de $\underline{I}_{B_C}$ respecto de $\underline{I}_{B_L}$, como se aprecia en la Figura 1-8, determina que $\underline{I}_B < \underline{I}_{B_L}$. Esta disminución también se manifiesta en $Q < Q_{B_L}$ pero sin afectar a P y a P.

Los detalles de la potencia oscilante en cada elemento reactivo y en el paralelo de los mismos se grafica en la Figura 1-12. En forma similar se aprecia en la Figura 1-13 respecto de la energía reactiva.

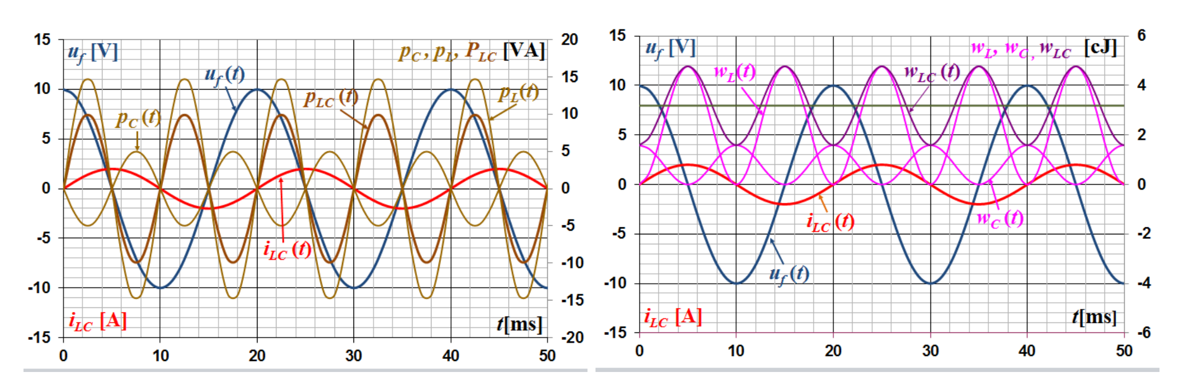


Figura 1-12: gráficas de $u_f(t)$, $i_{LC}(t)$, $p_L(t)$, $p_C(t)$ y $p_{LC}(t)$

Figura 1-13: gráficas de $u_f(t)$, $i_{LC}(t)$, $w_L(t)$, $w_C(t)$ y $w_{LC}(t)$

En la gráfica de las potencias se ve que $p_{LC}(t)$ tiene el máximo $Q < Q_{B_L}$. Pero si se presta atención a la gráfica de la energía, la $w_{LC}(t)$ oscila con menor amplitud pero alrededor de un valor medio mayor que el de los propios de cada elemento.

Esta característica en la transformación de energía de la fuente de tensión en los elementos conservativos ya se anticipa en la Ec. 1-15 de la que surge que la amplitud de $w_{LC}(t)$ es igual a $\dfrac{Q_L - Q_C}{2\omega}$ con un valor medio $\dfrac{Q_L + Q_C}{2\omega}$.

¿Qué sucede si se aumenta el valor de C, de modo que resulte $Q_C = Q_L$, y asegurando su correspondiente energía inicial?

Teniendo en cuenta que estos valores son $C=\frac{Q_L}{\omega\cdot U_{ef}^2}$ y $w_C(0)=\frac{Q_L}{\omega}$, surgen las siguientes respuestas:

- Respecto a la corriente.

$i_{LC}(t)=0$ ó $\underline{I}_{U_f}=\underline{I}_G$.

- Respecto a la potencia.

$p_{LC}(t)=0$, por lo que $p_T(t)=\text{P}+P\cdot cos(2\omega t)$.

- Respecto a la energía.

$w_{LC}(t)$ resulta constante y coincide con $\overline{w_{LC}(t)}=\frac{2Q_L}{2\omega}=\frac{Q_L}{\omega}=w_C(0)$ y determinando que $w_T(t)=\text{P}\cdot t-\frac{P}{2\omega}\cdot sen(2\omega t)+\frac{Q_C}{\omega}$.

Esta última conclusión no implica que no haya energía oscilante en cada uno de los elementos reactivos. En efecto, la Figura 1-14 muestra cómo se modifican las curvas de $w_L(t)$ y $w_C(t)$ de la Figura 1-13 cuando $Q_C=Q_L$, dando la suma de las mismas constante e igual al valor de energía que tiene el capacitor en el inicio de la aplicación de la tensión. Debe recordarse que la carga eléctrica de este componente tiene que ser aportada antes por cualquier elemento activo para resultar esa energía.

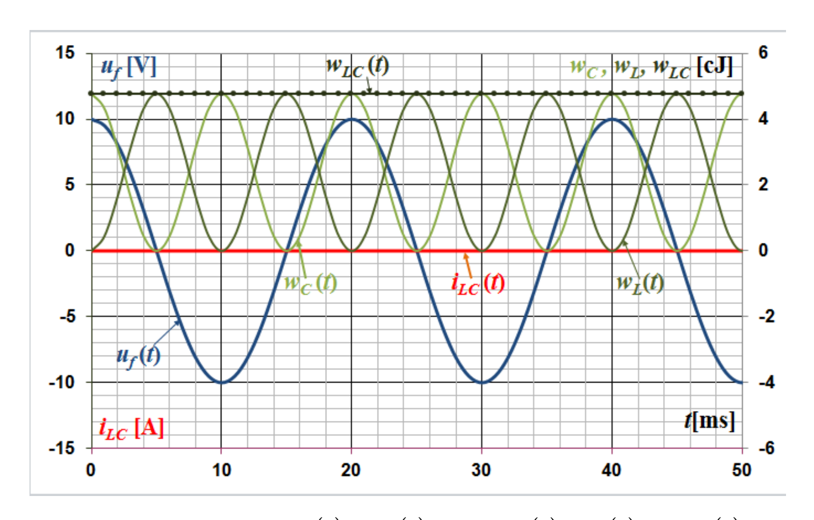


Figura 1-14: gráficas de $u_f(t)$, $i_{LC}(t)=0$ y $w_L(t)$ $w_C(t)$ y $w_{LC}(t)=cte$

Con la respuesta respecto de la corriente indicada más arriba, resulta $\phi=0$, y atendiendo las fórmulas de la Tabla 1-2 resulta la ya sabida $Q=0$, pero además $S=P$. También se comprueba que la transformación de energía no conservativa se da con menor valor eficaz de la corriente en la fuente ya que $I_{U_{ef}}=I_{G_{ef}}$.

Un parámetro ilustrativo de esta particularidad a partir de la situación más general es el denominado ***Factor de Potencia*** expresado por $FP = \frac{P}{S}$ el que resulta igual a $cos(\phi)$, sólo para señales de tensión y corriente senoidales[7].

Es fácil verificar que:

- $FP = 1$ cuando $Q_C = Q_L$, el *triángulo de "potencia"* es un simple segmento horizontal con valor $S = P$ y se cumple $I_{U_{ef}} = I_{G_{ef}}$ (toda esta verificación también se da si no hubiera elementos reactivos, $Q_C = Q_L = 0$).
- $0 < FP < 1$, si $Q_C \neq Q_L$, en el *triángulo de "potencia"* se cumple $\phi \neq 0$ y $S > P$.
- $FP = 0$, en el caso de no haber componente no reactivo y por ende tampoco transformación de energía en trabajo. El *triángulo de "potencia"* es un segmento vertical con valor $S = Q$.

Antes de ver otros enfoques y procedimientos sobre el tema, un rápido análisis del comportamiento respecto de la potencia y la energía del circuito serie en la sección siguiente puede ser útil.

1.3 Potencia y energía en el circuito serie (R, L y C)

El circuito serie para considerar potencia y energía es el de la Figura 1-15, activado por una fuente de corriente alterna senoidal $i_f(t) = U_{máx} sen(\omega t)$ A. Para el resistor, como ya se sabe, se lo considera con su característica resistiva R.

Figura 1-15: Circuito serie para el estudio de la potencia y energía con señal alterna senoidal

La forma de variación temporal elegida para la fuente de corriente es para asegurar que en $t = 0$ la energía en el inductor sea nula y no así en el capacitor (situaciones energéticas iniciales en los elementos reactivos como en el caso del circuito paralelo). En estas condiciones debe tenerse en cuenta que $sen^2(\omega t) = \frac{[1 - cos(2\omega t)]}{2}$.

[7] Hasta el advenimiento de la electrónica de potencia y salvo casos de arcos eléctricos, el cociente definición del *factor de potencia* se identificaba exclusivamente con $cos(\phi)$.

El estudio sería, para el resistor, una repetición de lo considerado en la sección 1.1.1 pero teniendo en cuenta la primera fila de la Tabla 2-1 en la ya mencionada página 31 de [1] y la anterior equivalencia trigonométrica.

Para los elementos reactivos vale el proceder ya visto en las secciones 1.1.2 y 1.1.3.

Se alienta al lector a realizar la reiteración de alguno de los casos y verificar las fórmulas resultantes que se muestran en la Tabla 1-3.

El resumen presentado en la Tabla 1-3 muestra, para la parte no reactiva, sólo un cambio de signo para la potencia y energía oscilante (es de interés graficar estas fórmulas y compararlas con las de las Figuras 1-2 y 1-3). Para los dos elementos reactivos, con las mismas condiciones energéticas iniciales en cada uno de ellos que en el circuito paralelo, las fórmulas de la potencia y energía son las mismas, con los detalles de dualidad correspondientes para Q_L y Q_C.

Si se considera $I_{máx} = 5{,}385\ \mathrm{A}$ para $i_f(t)$, $R = {}^{50}\!/_{29}\ \Omega$, $\omega L = {}^{30}\!/_{29}\ \Omega$ y $\omega C = 2{,}9\ \mathrm{S}$, el circuito serie resulta equivalente al circuito paralelo de la sección 1.2.4. Así, el ángulo de desfasaje entre la corriente aplicada y la tensión total resultante es el mismo ϕ y dado que $\underline{Z} = \underline{Y}^{-1}$ se cumple: $I_{máx}/U_{máx} = Y$ o lo mismo $U_{máx}/I_{máx} = Z$.

Tabla 1-3 Expresiones de la potencia y la energía en resistor, inductor y capacitor en serie excitados por una misma corriente alterna senoidal

	Potencia	Energía
Resistor (R)	$p_R(t) = \mathrm{P} - P \cdot cos(2\omega t)$ $\overline{p_R(t)} = \mathrm{P} = I_{ef}^2 \cdot R$ $P = I_{ef}^2 \cdot R$ $p_{p_R}(t) = -P \cdot cos(2\omega t)$	$w_R(t) = \mathrm{P} \cdot t - \frac{P}{2\omega} \cdot sen(2\omega t)$ $\overline{w_R(t)} = \mathrm{P} \cdot t$ $w_{p_R}(t) = -\frac{P}{2\omega} \cdot sen(2\omega t)$
Inductor (L)	$p_L(t) = p_{q_L}(t) = Q_L \cdot sen(2\omega t)$ $Q_L = I_{ef}^2 \cdot X_L$ $\overline{p_L(t)} = 0$	$w_L(t) = \frac{Q_L}{2\omega} \cdot \left[1 - cos(2\omega t)\right]$ $\overline{w_L(t)} = \frac{Q_L}{2\omega} = \frac{I_{ef}^2 L}{2}$ $w_{q_L}(t) = -\frac{Q_L}{2\omega} \cdot cos(2\omega t)$
Capacitor (C)	$p_C(t) = p_{q_C}(t) = -Q_C \cdot sen(2\omega t)$ $Q_C = I_{ef}^2 \cdot X_C$ $\overline{p_C(t)} = 0$	$w_C(t) = \frac{Q_C}{2\omega} \cdot \left[1 + cos(2\omega t)\right]$ $\overline{w_C(t)} = \frac{Q_C}{2\omega} = \frac{U_{C_{ef}}^2 C}{2}$ $w_{q_C}(t) = \frac{Q_C}{2\omega} \cdot cos(2\omega t)$

En consecuencia con las adecuadas escalas las Figuras 1-8 y 1-9 se transforman en las duales de las Figuras 1-16 y 1-17, y multiplicando cada lado del triángulo de impedancia por I_{ef}^2 surge el correspondiente de "*potencia*" de la Figura 1-18.

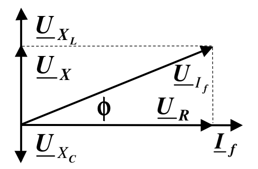


Figura 1-16: Diagrama fasorial

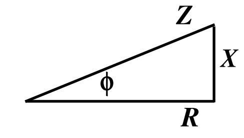


Figura 1-17: Triángulo de impedancia

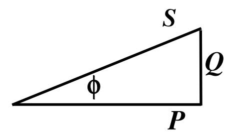


Figura 1-18: Triángulo de *"potencia"*

La característica de equivalencia no quita generalidad a los resultados presentados, pero favorece análisis posteriores.

Así puede apreciarse que para el nuevo concepto de triángulo de "*potencia*", reiterando la igual característica reactiva en los dos circuitos, este resulta con el cateto opuesto hacia abajo en el paralelo y para arriba en el serie. Si ambos circuitos fueran capacitivos el comentario anterior sería al revés.

¿Cómo serían las medidas de los lados de dicho triángulo para un circuito, respecto de los respetivos de su equivalente, con los detalles del valor de las fuentes de excitación más arriba establecidos?

Los componentes de la impedancia del circuito serie en función de los del circuito paralelo son las conocidas equivalencias: $R = \frac{G}{G^2 + B^2}$ y $X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$.

Multiplicando cada una de estas igualdades por $\frac{I_{máx}^2}{2} = I_{ef}^2$, valores correspondientes a la corriente en el circuito serie, resulta:

$$\frac{I_{máx}^2}{2} \frac{G}{G^2 + B^2} = I_{ef}^2 \ R \qquad\qquad \frac{I_{máx}^2}{2} \frac{B}{G^2 + B^2} = -I_{ef}^2 \ X$$

Por otra parte, como $G^2 + B^2 = \frac{I_{máx}^2}{U_{máx}^2} = \frac{I_{ef}^2}{U_{ef}^2}$, la parte izquierda de cada igualdad en las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$U_{ef}^2 G = I_{ef}^2 \ R \qquad\qquad U_{ef}^2 B = -I_{ef}^2 \ X$$

$$P_G = P_R \qquad\qquad Q_B = -Q_X$$

Los resultados conseguidos son respuesta a la pregunta formulada. Los triángulos de "*potencia*" son iguales en las medidas de sus respectivos catetos y el signo negativo en el correspondiente a Q indica que están en espejo respecto al cateto adyacente.

Conclusión:

conocido el triángulo de potencia de una configuración de componentes activados en serie, girándolo respecto de su cateto adyacente se obtiene el triángulo de potencia de la configuración equivalente de componentes activados en paralelo y viceversa

En definitiva, conocidas la tensión y corriente en un circuito eléctrico podrían calcularse respectivamente los triángulos de potencia de dipolos en serie y en paralelo.

En la siguiente sección se explica un método gráfico para la construcción de triángulos representativos de las asociaciones de los dipolos anteriores en el circuito.

1.4 El uso de los triángulos de potencia

A partir de la conclusión al final de la sección 1.3 se analizan dos ejemplos para mostrar cómo se puede operar con los triángulos de *"potencia"* en un circuito activado por una fuente de modo de obtener el triángulo que "vería" dicha fuente y así poder determinar en qué condiciones se desarrolla la transformación de energía entre la parte activa y la pasiva.

1.4.1 Ejemplo de dos impedancias de diferente carácter reactivo en serie

La propuesta consiste en reconsiderar el circuito de la Figura 1-15 dividiendo en dos el resistor y asociando cada mitad con cada uno de los elementos reactivos para hacer las dos impedancias en serie y alimentadas por una fuente de tensión que produce la misma corriente que en el circuito original. En otras palabras se tiene un circuito como muestra la Figura 1.19.

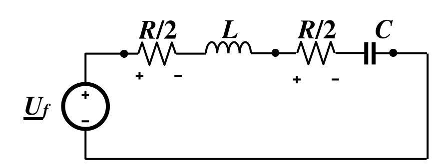


Figura 1-19: Circuito serie

Para poder comparar resultados se utiliza la misma escala de dibujo que la de los triángulos de las Figuras 1.11 y 1.18 que es de $10\,\frac{[\text{unidad de potencia}]}{[\text{cm}]}$ (la $[\text{unidad de potencia}]$ se refiere a $[\text{W}]$, $[\text{var}]$ o $[\text{VA}]$ según corresponda).

Teniendo en cuenta los datos dados en la sección 1.3, los cuales se reescriben a continuación, $I_{máx} = 5{,}385\ \text{A}$ para $i_f(t)$, $R = {}^{50}\!/_{29}\ \Omega$, $\omega L = {}^{30}\!/_{29}\ \Omega$ y $\omega C = 2{,}9\ \text{S}$, y las fórmulas de la Tabla 1-3, a continuación resultan los valores para cada triángulo de *"potencia"*.

Con referencia a la Figura 1-20, el triángulo rojo corresponde al dipolo inductivo con $Q_L = 15\ \text{var}$, $P_{R/2} = P/2 = 12{,}5\ \text{W}$ y su cateto opuesto hacia arriba.

En el vértice superior de la hipotenusa se dibuja el triángulo azul del dipolo capacitivo, siendo $Q_C = 5\ \text{var}$, $P_{R/2} = P/2 = 12{,}5\ \text{W}$ y su cateto opuesto hacia abajo.

Por último los vértices libres de cada triangulo definen la nueva hipotenusa del triángulo de líneas negras que obviamente debe coincidir con el de la Figura 1-18.

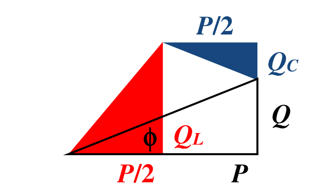


Figura 1-20: Triángulos de potencia

1.4.2 Ejemplo de impedancia capacitiva en serie con admitancia inductiva

El circuito a analizar sería el de la Figura 1.21, donde los valores para de la impedancia capacitiva son los mismos que en el circuito de la Figura 1-15 y los que definen la admitancia inductiva los del respectivo par en paralelo del circuito de la Figura 1-1. La fuente de tensión definida por $U_{máx} = 10\ \text{V}$ y fase nula.

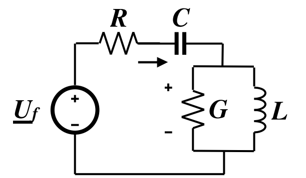


Figura 1-21: Circuito serie

Ya se recomendó en el segundo párrafo de la sección 1.1 repasar el capítulo 4 de [1] de modo resolver el circuito propuesto y determinar tanto el valor de la corriente $\underline{I}$ como de tensión $\underline{U}$. De dichas magnitudes importan el valor eficaz de las mismas al cuadrado para poder determinar los respectivos *triángulos de potencia* de cada dipolo reactivo.

Se deja al lector verificar que los resultados son los siguientes:

- Para la impedancia $\underline{Z}_1 = \left(\frac{50}{29} - j\frac{10}{29}\right)\Omega$, $P_R = 8{,}214\ \text{W}$ y $Q_C = 1{,}643\ \text{var}$
- Para la admitancia $\underline{Y}_2 = (0{,}5 - j0{,}3)\ \text{S}$, $P_G = 7\ \text{W}$ y $Q_L = 4{,}2\ \text{var}$

Usando la escala de dibujo $4{,}1\frac{[\text{unidad de potencia}]}{[\text{cm}]}$ y teniendo en cuenta la orientación de los catetos de cada Q se puede ir desarrollando la construcción de los triángulos de la Figura 1-22.

El triángulo azul se traza como el del mismo color en la Figura 1-20 (derivado de una impedancia capacitiva con el cateto opuesto hacia abajo) con los valores más arriba indicados.

El que surge de la admitancia, por ser inductiva también con el cateto hacia abajo es el dibujado en rojo claro. Para asociarlo en serie con el capacitivo, debe girarse sobre su cateto adyacente y luego componer el triángulo resultante de lados negros

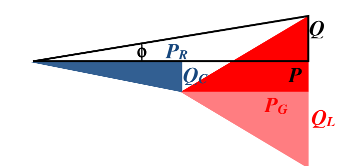


Figura 1-22: Triángulo de *"potencia"*

En los dos ejemplos se comprueba que los dos triángulos obtenidos tienen el cateto representativo del máximo de la potencia reactiva de menor valor como consecuencia de la complementación de las partes reactivas inductivas y capacitivas. Obviamente aumenta el cateto adyacente, dado que hay en cada caso dos elementos no reactivos los que inexorablemente deben sumar sus respectivas potencias medias P para determinar el ritmo total de energía transformada en trabajo u otra forma no conservativa.

En la próxima sección se verá un método con álgebra compleja.

1.5 La potencia compleja

Al igual que para el caso de la impedancia o la admitancia, en las cuales se definieron las respectivas $\underline{Z}$ e $\underline{Y}$ con sus ventajas operativas matemáticas, puede asociarse los dos tipos de *triángulos de "potencia"* a la denominada habitualmente ***potencia compleja*** (en rigor *potencia aparente compleja*) $\underline{S} = P \pm jQ$, con ciertos detalles que a continuación se explican.

1.5.1 Potencia compleja de una rama serie $\underline{Z} = R \pm jX$

Esta impedancia compleja (signo $+$ para caso inductivo y signo $-$ para capacitivo), con la misma corriente $\underline{I}$ y tensión $\underline{U}$ en bornes de la misma, obviamente es $\underline{U}/\underline{I} = R \pm jX$.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por $I_{máx}^2/2 = I_{ef}^2$ resulta:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\cdot I_{máx}^2 = I_{ef}^2\cdot R \pm j\,I_{ef}^2\cdot X = P \pm jQ = \underline{S} \qquad \text{Ec. 1-17}$$

Por otra parte como $\underline{I} \cdot \underline{I}^* = I_{máx}^2$ [8] consecuentemente $\underline{I}^* = I_{máx}^2 / \underline{I}$ que reemplazada en la Ec. 1-17 da:

$$\underline{S} = P \pm jQ = \frac{1}{2} \cdot \underline{U} \cdot \underline{I}^* \qquad \text{Ec. 1-18}$$

En definitiva La Ec. 1.18 muestra que:

el semi producto del número complejo de la tensión aplicada a la impedancia compleja por el <u>conjugado</u> del número complejo de la corriente en dicha impedancia resulta en otro número complejo cuya parte real es P y cuya parte imaginaria es $\pm Q$, correspondiendo el signo $+$ al caso inductivo.

1.5.2 Potencia compleja de una rama paralelo $\underline{Y} = G \pm jB$

Esta admitancia compleja (signo $+$ para caso capacitivo y signo $-$ para inductivo), con igual tensión $\underline{U}$ y corriente $\underline{I}$ en bornes de la misma, en este caso es $\underline{I}/\underline{U} = G \pm jB$.

Ahora multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por $\frac{U_{máx}^2}{2} = U_{ef}^2$ resulta:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \cdot U_{máx}^2 = U_{ef}{}^2 \cdot G \pm jU_{ef}^2 \cdot B = P \pm jQ = \underline{S} \qquad \text{Ec. 1-19}$$

También es $\underline{U} \cdot \underline{U}^* = U_{máx}^2$ y por lo tanto $\frac{U_{máx}^2}{2} = U_{ef}^2$ y reemplazada en la Ec. 1-19 da:

$$\underline{S} = P \pm jQ = \frac{1}{2} \cdot \underline{I} \cdot \underline{U}^* \qquad \text{Ec. 1-20}$$

En este caso la Ec. 1.20 muestra que:

el semi producto del número complejo de la corriente aplicada a la admitancia compleja por el <u>conjugado</u> del número complejo de la tensión en bornes de dicha admitancia resulta en otro número complejo cuya parte real es P y cuya parte imaginaria es $\pm Q$, correspondiendo el signo $+$ al caso capacitivo.

1.5.3 Resumen y ejemplo

Las fórmulas de cálculo obtenidas tanto en la Ec. 1-18 como en la Ec. 1-20 se refieren al producto algebraico de los números complejos representativos de los fasores de tensión y de corriente aplicados y/o resultantes en cada caso.

---

[8] La nomenclatura $\underline{I}^*$ para expresar el conjugado de un complejo es la establecida por la normativa eléctrica internacionales aceptada en Argentina.

Según se tome como referencia la corriente común (impedancia) o la tensión común (admitancia), dichas magnitudes deben ser las conjugadas en cada producto, atendiendo a la implicancia del signo que figuran en los recuadros al final de las secciones 1.5.1 y 1.5.2.

Para poder referirse a cada situación se puede llamar:

$$\underline{S}_{I^*} = \frac{\underline{U} \cdot \underline{I}^*}{2}$$ Impedancia o corriente común

$$\underline{S}_{U^*} = \frac{\underline{I} \cdot \underline{U}^*}{2}$$ admitancia o tensión común

Es de fácil comprobación que $\underline{S}_{I^*} = \underline{S}^*_{U^*}$ o que $\underline{S}_{U^*} = \underline{S}^*_{I^*}$, lo que significa que el conjugado de una situación implica solamente el cambio de signo de la parte imaginaria de la correspondiente potencia compleja. La conclusión recuadrada en la sección 1.3 anticipa esta comprobación.

Un detalle más: las fórmulas son válidas para componentes individuales dando las componentes P o Q según el tipo de elemento y funcionando el conjugado para los reactivos.

Entonces, la asociación de *triángulos de potencia* se realiza fácilmente siguiendo este procedimiento general:

1. Suma de las $\underline{S}_{I^*}$ de los elementos en serie con la misma $\underline{I}$
2. Suma de las $\underline{S}_{U^*}$ de los elementos en paralelo con la misma $\underline{U}$
3. Suma de las $\underline{S}^*_{U^*}$ de los elementos en paralelo si el paralelo se considera en serie
4. Suma de las $\underline{S}^*_{I^*}$ de los elementos en serie si dicho serie se considera en paralelo

Se propone al lector verificar las dos opciones particulares siguientes:

5. Suma de las $\underline{S}_{U^*}$ de los elementos en serie con la misma $\underline{I}$, luego aplicado en el punto 2.
6. Suma de las $\underline{S}_{I^*}$ de los elementos en paralelo con la misma $\underline{U}$, luego aplicado en el punto 1.

Por último, si se considera el sistema cerrado del circuito, elemento activo y pasivo equivalente, la derivada de la potencia compleja en cada parte sumada resulta la energía en el sistema que ya se sabe debe ser nula. Esta conclusión es equivalente a afirmar que la potencia compleja en la fuente debe ser igual pero de signo contrario de la parte pasiva activada, o sea ambas son opuestas.

De nuevo se invita al lector a aplicar las Ec. 1-18 ó Ec. 1-20, según corresponda, a una fuente de tensión o de corriente activando un circuito y comprobar lo dicho en el párrafo anterior.

Un ejemplo sería la determinación de la potencia compleja en el caso del ya visto circuito de la Figura 1-21.

Dado que se deben hacer productos de números complejos, los fasores de las corrientes y tensiones que se calculen conviene expresarlas en forma polar. Respecto a los conjugados, resulta suficiente con solo cambiar el signo del argumento.

De haberse cumplido la recomendación y verificación propuestas a posteriori de la Figura 1-21 se dispondría de los siguientes datos: $\underline{I}_1 = 3{,}09\ e^{-j9{,}55°}\ \text{A}$ (corriente común a la impedancia y la admitancia), $\underline{U}_1 = 5{,}43\ e^{-j20{,}86°}\ \text{V}$ y $\underline{U}_2 = 5{,}29\ e^{j21{,}41°}\ \text{V}$.

El cálculo de las potencias complejas entonces da:

- $\underline{S}_1 = \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1^*}{2} = 8{,}38\ e^{j\left(-20{,}86°+9{,}55°\right)} = 8{,}22 - j1{,}64\ \text{VA}$ (triángulo azul, Figura 1-22)
- $\underline{S}_2 = \frac{\underline{I}_1 \underline{U}_2^*}{2} = 8{,}17\ e^{j\left(-9{,}55°-21{,}41°\right)} = 7 - j4{,}2\ \text{VA}$ (triángulo rojo claro, Figura 1-22)
- $\underline{S}_2^* = 7 + j4{,}2\ \text{VA}$ (triangulo rojo Figura 1-22)
- $\underline{S}_T = \underline{S}_1 + \underline{S}_2^* = 15{,}22 + j2{,}56\ \text{VA}$ (triángulo de lados negros, Figura 1-22)

Quedaría comprobar la opción 6 anterior.

Para introducir la siguiente sección, y dado que todo lo visto implica sin lugar a dudas corrientes y tensiones alternas senoidales, el *coseno* del argumento de $\underline{S}_T$ es el *factor de potencia* FP el que es deseable sea lo más cercano a la unidad de modo que la transformación de energía sea con la menor corriente en la fuente de tensión y en los conductores de conexionado. Ya se esbozó hacia el final de la sección 1.2.4 cómo puede obtenerse tal resultado en un procedimiento denominado habitualmente *compensación* y que se desarrolla en la sección siguiente.

1.6 Compensación del FP

1.6.1 Análisis preliminar

Si bien todo lo visto es válido independientemente de que se aplique al circuito pasivo tensión o corriente, dado que la realidad práctica está asociada a fuentes de tensión, toda vez que se haga referencia a la parte activa del circuito se sobrentiende ese tipo de fuente.

También este enfoque primario y general del procedimiento y objetivos de *compensar* el FP se realiza para cualquier tipo de combinación de elementos pasivos pero excitados por una única fuente de tensión.

Repasando conceptos anteriores, satisfaciendo el ya insistido principio de conservación, la energía en la fuente de tensión, o disminuye transformándose en energía no conservativa (trabajo mecánico, calor) en los elementos no reactivos, u oscila con carácter conservativo en los elementos reactivos. En ambos casos la variación en el tiempo de cada una es la potencia, cuyos máximos de oscilación resultan P y Q.

Ambas situaciones, ya se vio, significa que haya dos componentes de la corriente en la fuente: en fase con la tensión para el primer aspecto relacionado con la variación de la energía y en cuadratura para el segundo. La componente en fase está relacionada con P, mientras que la que está en cuadratura, con Q; y de la combinación de ambas, surge S, tal cual se vio oportunamente.

La energía eléctrica que, reiteran las compañías de electricidad, no es un bien renovable, es conveniente se disponga con la máxima eficiencia. En otras palabras, elementos reactivos o sea Q (corriente en cuadratura en la fuente), significa circulación extra de cargas tanto en la propia fuente como en los conductores de conexionado sin aporte en la transformación útil de la energía.

Dado que las simplificaciones de estudio anteriores con fuentes y conductores teóricos deberían cambiarse por realidades inevitables, la corriente reactiva significa como mínimo:

- Modificación innecesaria de la tensión en la impedancia interna de la fuente y en la de los conductores de conexionado pudiendo causar valores resultantes no adecuados para el buen funcionamiento de los equipos eléctricos modelados por el circuito.
- Generación de calor en la parte no reactiva de las impedancias mencionadas en el punto anterior y en proporción cuadrática de la misma ocasionando aumento de la temperatura por encima del ambiente en dichas partes con peligro sobre las aislaciones de las mismas.

En definitiva anular la corriente reactiva significa lograr $FP = 1$ o $Q = 0$ en el equivalente del circuito que ve la fuente de tensión.

1.6.2 Compensación del FP por anulación de Q

Para explicar el procedimiento que permite lograr el objetivo del título anterior, el circuito de la Figura 1-19 sirve de referencia.

Para dicho circuito ya se sabe cómo determinar gráficamente el correspondiente *triángulo de "potencias"* que ve la fuente de tensión. Inclusive obtener analíticamente los datos de P y Q, mediante el cálculo de $\underline{S}$. Para el ejemplo presentado resultan $P_T = (2 \cdot 12{,}5)\ \mathrm{W}$ y $Q_T = (15 - 5)\ \mathrm{var}$, con el valor positivo de este último indicando carácter inductivo.

¿Qué pasaría si hubiera habido un capacitor, ya se sabe con la adecuada carga inicial según la fuente, conectado tanto en paralelo con dicha fuente de tensión como con el conjunto serie?

1. La determinación del *triángulo de "potencias"* debería tener en cuenta el Q_C del capacitor.
2. Podría incluirse dicho aporte, por ejemplo con el método de la potencia compleja, sumando según el procedimiento 2 del apartado 1.5.3 por estar en paralelo.
3. La aclaración del punto 2 anterior implica hacer el conjugado $\underline{S}_T$ y sumarlo a $\underline{S}_C = jQ_C$.
4. Si $Q_C = 10\ \mathrm{var}$, el triángulo finalísimo resultante tiene cateto opuesto nulo, o sea $FP = 1$, $\phi = 0$ y la corriente en la fuente en fase con la tensión.

5. Por último, el cálculo de la capacitancia del capacitor surge de operar con la fórmula de Q_C del final de la columna de potencia en la Tabla 1-1: $C = \dfrac{Q_C}{\omega \cdot U_{ef}^2} = 636{,}62\,\mu\text{F}$, recordando que $U_{f_{máx}} = 10\,\text{V}$.

Se realizan a continuación algunos comentarios importantes asociados a los cinco puntos anteriores.

El agregado debe ser un elemento reactivo para que no haya transformación de energía no conservativa. Sin embargo habrá una disminución constante mayor en el tiempo de energía reactiva en la fuente igual a la suma de los valores medios de la misma en capacitores e inductores, incluido el elemento agregado (ver la Tabla 7-1 y la Tabla 7-2 para las fórmulas de cálculo según la forma de conexión de dichos componentes).

El componente de compensación (capacitor si el resto del circuito es inductivo o viceversa) deberá colocarse en bornes de la fuente (recordar que tiene impedancia interna inevitable) dado que es fácil demostrar que prácticamente no afectaría las tensiones y corrientes en el resto del circuito y por lo tanto los valores de las componentes del *triángulo de "potencia"* cuyo FP se pretende subir a la unidad. Por otra parte la conexión en paralelo es muchísimo más sencilla en la práctica que la obligada apertura de circuito para colocarlo en serie.

El circuito de la Figura 1-21 es un interesante ejemplo del comentario del párrafo anterior. Se propone al lector determinar cómo modifica el *triángulo de "potencia"* de la Figura 1-22 conectar una $B_{C_1} = 0{,}221\,\text{S}$ en paralelo con la admitancia inductiva. Como aporte al éxito, el módulo de la corriente en la fuente de tensión vale ahora $2{,}73\,\text{A}$. ¿Por qué cambió el valor de P?

Si en vez de lo anterior, se conecta en paralelo con la fuente de tensión una susceptancia menor, de digamos $B_{C_2} = 0{,}051\,\text{S}$ ¿cuáles serían las consecuencias? ¿Y los beneficios?

Proceder como lo explicado en esta sección requiere, como ya se dijo, conocer tensiones y corrientes en el circuito en el que se pretende hacer más eficiente la transformación energética no conservativa disminuyendo el valor de la corriente en la fuente de tensión.

A continuación se analiza otra forma de obtener el mismo logro a partir de dichas magnitudes del circuito

1.6.3 Compensación del FP desde el punto de vista de la corriente

Teniendo en cuenta el mismo circuito de la Figura 1-19 a efectos de comparaciones, el *triángulo de "potencia"* final asociado a la fuente de tensión se deriva de la admitancia que ve dicha fuente: $\underline{Y}_{eq} = G_{eq} \pm jB_{eq}\,\text{S}$ (nuevamente $+$ para capacitivo y $-$ para inductivo)

Cualquier combinación de componentes de circuito que determine una corriente en la fuente de tensión en estudio tal que $\underline{I}_f = \underline{U}_f \cdot \underline{Y}_{eq}$ es indistinta para la fuente. Esta corriente, ya

se dijo, tendrá las dos componentes temporales siguientes, identificadas con la nomenclatura explicada en la Introducción de la sección 1-1:

- En fase con la tensión: $i_p(t)=G_{eq}\cdot u_f(t)$ determinante de $p_{P_G}(t)$ y de $w_{P_G}(t)$.
- En cuadratura con la tensión: $i_q(t)=B_{eq}\cdot u_f(t+t/4)$, que no es necesario reiterar lo que determina ya que el objetivo es eliminarla.

Por el lado práctico, ya existen numerosos procedimientos para registrar tanto la tensión como la corriente en la fuente. A partir del procesamiento numérico de dichos registros también es simple obtener los datos de $p(t)=u_f(t)\cdot i_f(t)$ y a posteriori $\overline{p(t)}$ que es lo mismo que conocer P.

La Figura 1-23 es una muestra de lo dicho para los valores del circuito de referencia ya mencionado. La gráfica es en régimen permanente, es decir con energía media en los elementos reactivos ya establecida. En la misma puede apreciarse los valores de $p(t)<0$ debido a la participación de $p_q(t)$, como se anticipara en el párrafo a posteriori de la Ec. 1-16.

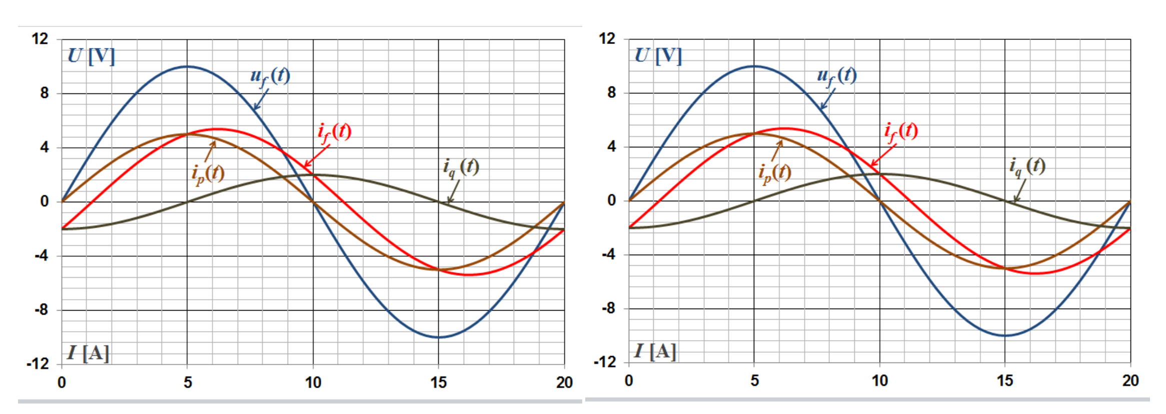


Figura 1-23: Tensión, corriente, potencia instantánea y potencia media

Figura 1-24: Tensión, corriente total, corriente en fase y corriente en cuadratura

Ahora bien, P y P, que es sabido coinciden numéricamente entre sí, son iguales a $U_{ef}^2\cdot G_{eq}$, por lo que $G_{eq}=\dfrac{\mathrm{P}}{U_{ef}^2}$. O sea, se ha encontrado como conocer la componente no reactiva de $\underline{Y}_{eq}$ desconociendo conformación y topología del circuito conectado a la fuente de tensión. A partir de dicho dato $i_p(t)=G_{eq}\cdot u_f(t)$ es obtenible tanto por cálculo numérico como analíticamente. El paso siguiente es conseguir $i_q(t)=i_f(t)-i_p(t)$, también con la metodología anterior. La Figura 1-24 grafica los resultados para el circuito en análisis.

Además de verificar que $i_p(t)$ e $i_q(t)$ son ortogonales, el atraso o adelanto de la corriente respecto de la tensión permite determinar la característica reactiva de $B_{eq}=I_{q_{máx}}/U_{f_{máx}}$ (en este ejemplo inductivo).

En general, según sea dicha característica se elige el otro componente reactivo y con suseptancia igual a B_{eq}, de manera que en paralelo con la fuente permite una corriente opuesta a $i_q(t)$ y en consecuencia que $i_f(t)=i_p(t)$ o sea ¡compensación total lograda!

Los resultados numéricos sucesivos de este ejemplo son: de la Figura 1-23, $\mathrm{P}=25\,\mathrm{W}$, de la formula pertinente, $G_{eq}=0{,}5\,\mathrm{S}$, nuevamente de la Figura 1-24, $I_{q_{máx}}=2\,\mathrm{A}$ y consecuentemente $B_{eq}=0.2\,\mathrm{S}$ suseptancia correspondiente a un $C=636{,}62\,\mu\mathrm{F}$.(Ver punto 5 de la sección 1.6.2).

Teniendo en cuenta que $G_{eq}/Y_{eq}=cos(\phi)$ y $B_{eq}/Y_{eq}=sen(\phi)$ no es difícil verificar que $I_{p_{máx}}=I_{f_{máx}}\,cos(\phi)$ y $I_{q_{máx}}=I_{f_{máx}}sen(\phi)$. En consecuencia:

$$P=\frac{U_{f_{máx}}I_{f_{máx}}}{2}cos(\phi)=\frac{U_{f_{máx}}I_{p_{máx}}}{2}$$
$$Q=\frac{U_{f_{máx}}I_{f_{máx}}}{2}sen(\phi)=\frac{U_{f_{máx}}I_{q_{máx}}}{2}$$
Ec. 1-21

1.6.4 Algunos comentarios adicionales

El resultado óptimo de compensación para conseguir $FP=1$ implica el agregado en paralelo de la fuente de tensión que un elemento reactivo con adecuada energía inicial de modo de suministrar la corriente que necesita el complementario equivalente del circuito pasivo y así no requiere dicha corriente de la fuente.

En general se usan capacitores que pueden especificarse con el valor de Q que pueden compensar a partir la tensión que soportan. Dado que los valores comerciales no son continuos hay que asociarlos en paralelo según el requerimiento.

Obvias razones económicas determinan que se acepten valores de $FP<1$ como razonable compensación.

Dado que la compensación del FP implica que $i_p(t)\rightarrow i_f(t)$ o lo mismo la reducción de $i_q(t)$, la variación de $I_{p_{ef}}/I_{f_{ef}}$ e $I_{q_{ef}}/I_{f_{ef}}$ con FP podría ilustrar sobre el particular.

Considerando las dos expresiones de la Ec. 1-21, el lector curioso puede demostrar que $I_{p_{ef}}/I_{f_{ef}}=FP$ e $I_{q_{ef}}/I_{f_{ef}}=\sqrt{1-FP^2}$ con el resultado gráfico de la Figura 1-25 en la siguiente página.

En la misma se observa que a partir de $FP>0.7$, $I_{p_{ef}}/I_{f_{ef}}>I_{q_{ef}}/I_{f_{ef}}$ y además $I_{p_{ef}}/I_{f_{ef}}\rightarrow 1$ e $I_{q_{ef}}/I_{f_{ef}}\rightarrow 0$, de modo que superar dicho valor del Factor de Potencia sería deseable.

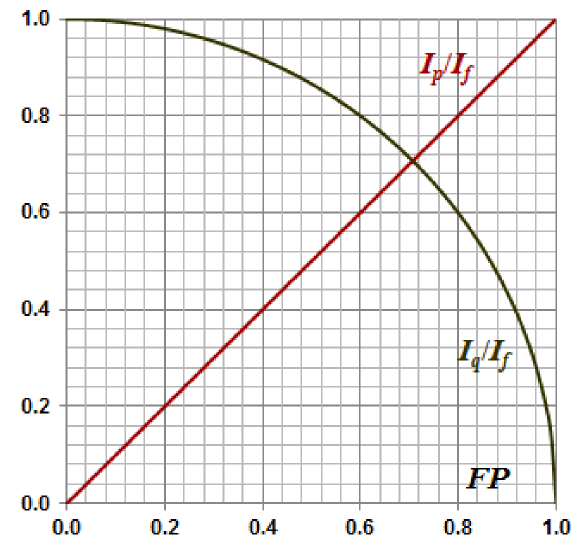


Figura 1-25: variación de $I_{p_{ef}}/I_{f_{ef}}$ e $I_{q_{ef}}/I_{f_{ef}}$ con FP

1.7 Medición de la potencia. Método para obtener Q

En la sección 2.6 de [1] se analizan los aspectos generales de los instrumentos de medición básicos usados en la electrotecnia, el voltímetro y el amperímetro.

Cada uno de estos instrumentos mide o la tensión o la corriente y sólo en caso de señales constantes (continua) el producto de ambas indicaciones, por ejemplo a la salida de una fuente que alimenta un circuito pasivo, da la información de la potencia P.

En caso de señales alternas como se han estudiado en este capítulo y usando voltímetro y amperímetro que dan información de este tipo de señales, se tiene los valores eficaces de la tensión y la corriente y haciendo el producto lo que se obtiene es S.

Para determinar por medición el valor de P se requiere la participación al mismo tiempo de la tensión y la corriente. Esto implica, a diferencia de lo ya visto para el voltímetro y el amperímetro, que el nuevo instrumento tenga dos pares de terminales de conexionado. Un par que sea para el paso de las cargas eléctricas que determinan la corriente y otro par para aplicar la tensión. El sentido de la corriente y la polaridad de la tensión en los respectivos pares son importantísimos para el signo de la potencia que debe indicar el instrumento. Los detalles constructivos escapan al alcance de este texto, pero puede decirse:

- Se denomina ***wattímetro*** o ***vatímetro*** (recordar que mide P con unidad $[\mathrm{W}]$)
- Los primeros, del tipo analógico con indicación mediante una aguja móvil, esta se desplaza en proporción a $\mathrm{P} = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos(\phi)$.
- Los actuales, basados en el registro digital de la tensión y la corriente, indican numéricamente y para mayor generalidad del tipo de forma de la señal, $\mathrm{P} = \overline{u(t) \cdot i(t)}$.

En la Figura 1-26 se muestra un esquema representativo del mismo. Los bornes de corriente son $\mathbf{1}$ y $\mathbf{2}$. Los de tensión cualquiera de los anteriores respecto del $\mathbf{3}$.

Considerando el instrumento ideal la tensión entre $\mathbf{1}$ y $\mathbf{2}$ será nula y por lo tanto indistinta la elección de los mismos para considerar los bornes de tensión. En la realidad esto no sucede con su consecuente error como ya se vio en la sección 2.6 de [1].

La Figura 1-27 muestra un ejemplo de la conexión del **wattimetro** en un circuito simple en el que se pretende medir la potencia en $\underline{Z}$. La tensión en este componente es la misma que la en los bornes $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$ los que tendrían que ser elegidos como bornes de tensión del instrumento. Si así fuera la corriente por el watimetro sería $\underline{I}_f$ y no $\underline{I}_Z$ (LKT en el supernodo de este último) con un error de medida. El lector podrá concluir que sucede si se asegura la corriente y no la tensión por analogía con el caso de medición de la resistencia de un resistor vista en la ya mencionada sección 2.6 de [1].

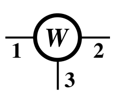


Figura 1-26: wattimetro

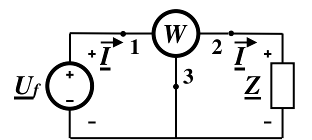


Figura 1-27: medición de potencia

Por otra parte haciendo el cociente entre la medición del wattimetro y el resultado del producto de U_{ef} e I_{ef} medidas con voltímetro y amperímetro se obtiene FP, en general menor que la unidad (siempre que las señales de tensión y corriente sean senoidales).

Un detalle interesante es el resultado de la siguiente particular medición. En vez de aplicar los valores de $u(t)$ al wattimetro, se aplican los valores correspondientes al fasor de dicha tensión pero atrasado $\pi/2$ (o lo mismo aplicar $u(t - T/4)$). Realizar este artificio implica obtener el resultado del valor medio de la tensión estando en fase con la componente inductiva de la corriente si la hubiera. Si así fuera, dicho valor medio sería distinto de cero, y se alienta al lector a verificar que coincide con Q_L. También es correcto afirmar, que si el resultado fuera negativo la medida corresponde a Q_C, y hubiera dado positivo si la tensión aplicada fuera $u(t+T/4)$.

Esta pseudo medición está dando justamente el valor de la potencia reactiva que debería ser compensada para mejorar el FP según se vio en la sección 1.6.2.

1.8 Referencias bibliográficas

[1] Circuitos Eléctricos - Parte I. M. Deorsola, P. Morcelle. Libros de Cátedra. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata.

CAPÍTULO 2
Respuesta en frecuencia

A veces es necesario conocer cómo resulta el funcionamiento de un cierto circuito cuando se aplican excitaciones senoidales de diferentes frecuencias a partir del análisis de las amplitudes de las respuestas obtenidas. En estos casos, las señales de frecuencias dominantes corresponderán a amplitudes relativamente grandes, mientras que las frecuencias que resultan suprimidas corresponden a amplitudes relativamente pequeñas.

Hay muchas aplicaciones en las cuales la respuesta a la frecuencia es importante; entre ellas, una muy común es el diseño de filtros eléctricos, que son redes que permiten el paso de señales de cierta frecuencia y bloquean el paso de otras. Un ejemplo típico de este tipo de aplicaciones son los receptores de radio.

Otras aplicaciones simplemente tienen que ver con el conocimiento de la capacidad de respuesta de ciertos sistemas, definiéndose en este caso lo que se denomina *ancho de banda*.

En este capítulo se estudia el comportamiento de los circuitos cuando se alimentan con una fuente alterna senoidal de amplitud fija y frecuencia (o, lo que es lo mismo, *pulsación*) variable, generalmente entre 0 e ∞.

A partir del estudio analítico de la situación planteada se realizan gráficas que permiten visualizar el mencionado comportamiento.

Dichos estudios se realizan en base al comportamiento de X o B en un circuito frente a la variación de f u ω. Generalmente se analiza una respuesta seleccionada entre todas las posibles de un circuito y se compara con la señal de excitación de entrada en dichas condiciones. Del análisis surgen valores de pulsación que resultan relevantes para definir características de comportamiento.

2.1 Reactancia y susceptancia en función de la pulsación

Si la pulsación de la tensión o la corriente con que se excita un inductor o un capacitor es de diferente valor, tanto la reactancia como la susceptancia de dichos elementos (ya estudiadas fasorialmente), también resultan de distinto valor.

En efecto, para el caso del módulo: $X_L = \omega L$, $X_C = (\omega C)^{-1}$, $B_L = (\omega L)^{-1}$ y $B_C = \omega C$.

A modo de ejemplo, si $L = 1\,\mathrm{H}$ y $C = 0{,}5\,\mathrm{F}$, la Figura 2-1 muestra el comportamiento función de la pulsación de ambas reactancias. Si $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$ y $C = 1\,\mathrm{F}$, en la Figura 2-2 se grafica como varían las susceptancia con la pulsación[9].

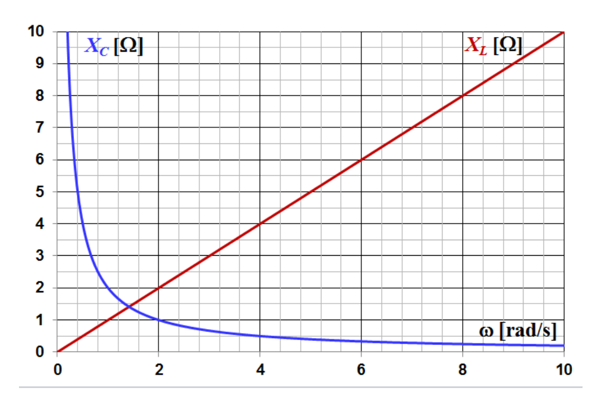


Figura 2-1: Reactancias función de la pulsación

Figura 2-2: Susceptancias función de la pulsación

En cada gráfico se comprueba:

sí $\omega \to 0$, $X_L = 0$	si $\omega \to \infty$, $X_L \to \infty$	si $\omega \to \infty$, $B_L = 0$	si $\omega \to 0$, $B_L \to \infty$
si $\omega \to 0$, $X_C \to \infty$	si $\omega \to \infty$, $X_C = 0$	si $\omega \to \infty$, $B_C \to \infty$	sí $\omega \to 0$, $B_C = 0$

y la variación lineal de X_L y B_C, e hiperbólica de B_L y X_C, con ω.

La presentación en el mismo gráfico de las reactancias o susceptancias de cada elemento reactivo muestra también que el valor de ω para el cual $X_L = X_C$ ó $B_C = B_L$ en cada una de las figuras corresponde a $\omega_0 = (L \cdot C)^{-1/2}$, o sea la *pulsación natural de oscilación propia* de dicho par de elementos reactivos si estuvieran conectados[10].

Multiplicando y dividiendo este valor de pulsación particular en las expresiones de la reactancia y susceptancia ya vistas y con un mínimo de álgebra adicional se obtienen las siguientes expresiones adimensionales:

---

[9] Puede reconocerse en la Figura 2-2 respecto de la Figura 2-1 los conceptos de dualidad presentados en la Página 10 del Capítulo 1, Página 46 del Capítulo 2 y Página 60 del Capítulo 3 de [1].

[10] Ver final de la sección 6.6 del Capítulo 6 de [1].

$\frac{X_L}{\omega_0 L} = \frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{X_C}{(\omega_0 C)^{-1}} = \frac{\omega_0}{\omega}$	$\frac{B_L}{(\omega_0 L)^{-1}} = \frac{\omega_0}{\omega}$	$\frac{B_C}{\omega_0 C} = \frac{\omega}{\omega_0}$

Llamando $x = \omega/\omega_0$ y teniendo en cuenta la forma habitual de graficar en el sistema de coordenadas cartesianas, las anteriores podrían generalizarse como sigue:

$$y_{X_L} = x \qquad y_{X_C} = 1/x \qquad y_{B_L} = 1/x \qquad y_{B_C} = x$$

Los subíndices en cada una de las ordenadas y hace referencia a las respectivas reactancias y/o susceptancias y debe quedar claro que las nuevas expresiones se derivaron por graficar simultáneamente ambas características de un inductor y de un capacitor que en una eventual vinculación definen, como ya se dijo, una pulsación natural de oscilación.

La Figura 2-3 muestra la representación de estas últimas expresiones, reiterando su carácter adimensional

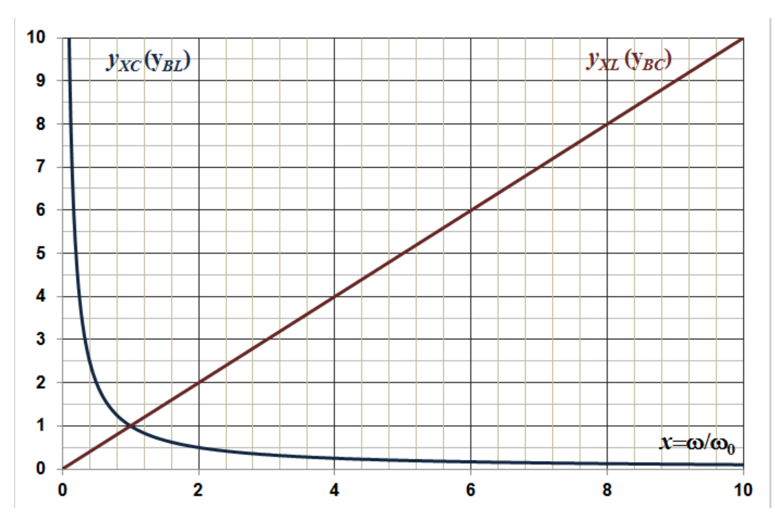


Figura 2-3: Expresiones adimensionales

Las gráficas en la figura anterior ahora se cruzan en el punto $(1,1)$ y se comportan en forma universal para determinar cómo sería la variación de reactancias o susceptancias de cualquier inductor y capacitor - graficadas conjuntamente – en función de la pulsación.

En efecto, basta calcular $\omega_0 = (L \cdot C)^{-1/2}$ y con este valor modificar la escala de abscisas. La escala del eje de ordenadas se cambia con el factor $\omega_0 \cdot L = (\omega_0 \cdot C)^{-1}$ en el caso de reactancias (¿Cómo serían los cambios en caso de susceptancias? ¿Si se usa dualidad?).

Representando las funciones de la Figura 2-3, pero con el eje de abscisas en escala logarítmica, resultan las gráficas de la Figura 2-4.

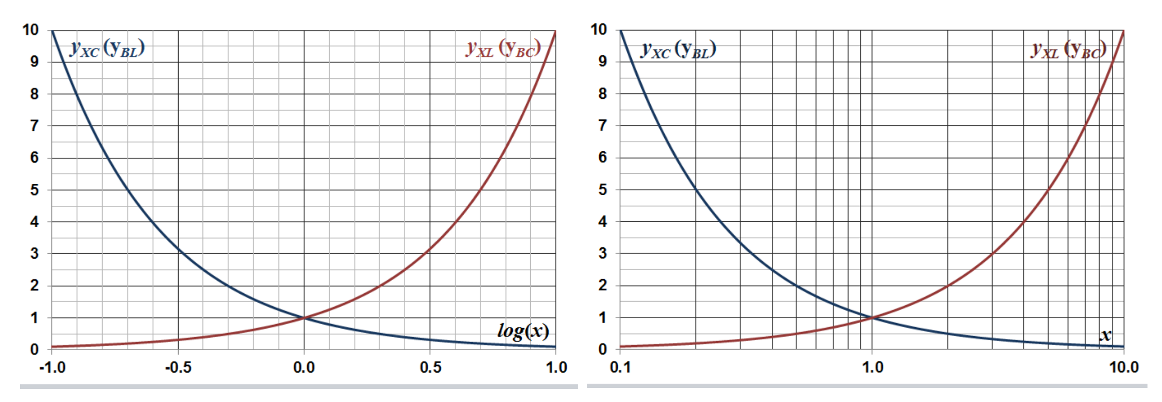


Figura 2-4: Gráfico de la Figura 2-3 en función del $log\ (x)$ (izquierda) y con el eje x en escala logarítmica (derecha).

Es notable en cualquiera de las figuras anteriores, que el cambio en la escala del eje de abscisas (que, se reitera, corresponde a la pulsación referida a la natural de los elementos reactivos) hace que las curvas adimensionales representativas de los pares y_{X_C} , y_{X_L} e y_{B_L} , y_{B_C} resulten simétricas especulares respecto de una recta vertical que pasa por $log(1)=0$. Esta particularidad en la representación determina que en los estudios siguientes sea frecuente el uso de la escala logarítmica para el eje de la pulsación, ya sea en forma absoluta o relativa a alguna pulsación representativa como se verá.[11]

Respecto del desfasaje entre tensión y corriente en los dos elementos reactivos siendo la pulsación de diferente valor resulta obvia la conclusión que independiente del valor de esa pulsación siempre la corriente estará $\pi/2$ atrasada de la tensión en el inductor y siempre la tensión estará $\pi/2$ atrasada de la corriente en el capacitor.

Habiendo presentado el comportamiento de los elementos reactivos con la pulsación se pasará a estudiar el resultado de conectar una fuente de tensión alterna senoidal u_f , de amplitud constante pero cuya frecuencia puede variar desde cero hasta infinito, a combinaciones circuitales serie y paralelo que incluyan también resistores.

2.2 Conexión serie de resistores, resistor-inductor y resistor-capacitor

El estudio consiste en:

1º Establecer la función de transferencia[12] para la única corriente (consecuencia) en relación con la tensión aplicada (causa), variando la pulsación.

---

[11] Expresar x en escala logarítmica equivale a generar la variable $z=log(x)$ que implica $x=10^z$ .Así $y_1(x)=x$ se transforma en $y_1(z)=10^z$ e $y_2(x)=x^{-1}$ en $y_2(z)=10^{-z}$ y para estas nuevas se cumple $y_1(-z)=10^{-z}=y_2(z)$.

[12] Repasar el concepto de la característica de transferencia en la sección 2.2 del Capítulo 2 de [1].

2º De ser posible referir, tanto la corriente como la pulsación respectivamente, a algún valor particular de dichos parámetros de modo de obtener expresiones adimensionales para mayor generalidad (curvas universales o normalizadas). Tanto este paso como el anterior obviamente implican cálculos con fasores

3º Calcular módulo y fase de la corriente normalizada determinada en el paso anterior en función de la pulsación normalizada.

4º También calcular módulo y fase de las funciones de transferencia de cada tensión en los elementos serie (consecuencias) en relación con la tensión aplicada (causa), en función de la pulsación, de ser posible referida a alguna pulsación particular.

5º Analizar lo obtenido en el paso 4º fijando parámetros característicos y sacando conclusiones.

2.2.1 Serie de dos resistores

Esta combinación, mostrada en la Figura 2-5, es el ya conocido divisor resistivo de tensión, y dado que los dos elementos pasivos no son reactivos no dependen del valor de la pulsación. En consecuencia su estudio tendrá resultados obvios respecto a la pulsación, pero permite aplicar los pasos de estudio anteriores con mayor facilidad y los resultados que se obtienen servirán de comparación para la otra combinación serie que incluye un elemento reactivo para el que, ya se vio, su reactancia varía con la pulsación.

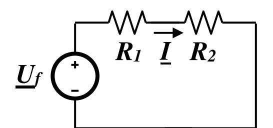


Figura 2-5: Circuito serie de dos resistores

A partir de la Figura 2-5 surge inmediatamente la Ec. 2-1 para determinar el cálculo de la única corriente.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_f}{R_1 + R_2} \qquad \text{Ec. 2-1}$$

Si se escribe la $\underline{I}$ (consecuencia) referida a $\underline{U}_f$ (causa), resulta la Ec. 2-2 que define la función de transferencia correspondiente, que no es más que la conductancia total del circuito pasivo (1º paso). En esta combinación circuital no puede fijarse ninguna corriente particular que no sea la ya calculada y tampoco pulsación, por lo que se saltea el paso 2º.

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}_f} = \frac{1}{R_1 + R_2} \qquad \text{Ec. 2-2}$$

El divisor resistivo en estudio se puede representar también en las dos formas de las Figuras 2-6 y 2-7

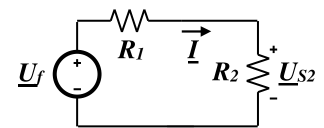


Figura 2-6: Otra forma de la Figura 2-5

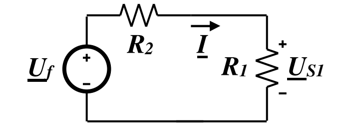


Figura 2-7: Otra forma de la Figura 2-5

De este de modo, en cada una de las formas de representar el circuito, la tensión en cada resistor queda a la derecha del dibujo y pueda interpretarse como una tensión de salida (de ahí el subíndice $_S$) siendo la tensión de la fuente la de entrada (que en lo que sigue se mantiene con el subíndice $_f$, siendo frecuente en la bibliografía el uso de la e).

Con el detalle anterior, multiplicando la función de transferencia de la Ec. 2-2 tanto por R_2 como por R_1, resultan las dos nuevas funciones de transferencia: Ec. 2-3 y Ec. 2-4.

$$\frac{\underline{I} \cdot R_2}{\underline{U}_f} = \frac{\underline{U}_{S2}}{\underline{U}_f} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{Ec. 2-3}$$

$$\frac{\underline{I} \cdot R_1}{\underline{U}_f} = \frac{\underline{U}_{S1}}{\underline{U}_f} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{Ec. 2-4}$$

Las dos expresiones anteriores también son adimensionales y definidas solamente por la parte pasiva del circuito.

Para cualquier valor, tanto de amplitud como de pulsación de la “entrada” $\underline{U}_f$, el módulo de cualquiera de las tensiones de “salida” referidas a dicha causa resulta constante y el ángulo de desfasaje nulo. Es decir, los gráficos de dichos módulos y/o ángulo de desfasaje en función de ω resultan obvias rectas horizontales y además no hay ninguna pulsación particular relevante para tomar como referencia.

Conclusiones derivadas de estos resultados se harán al final de esta sección 2-2.

2.2.2 Serie de resistor-inductor

La Figura 2-8 muestra el circuito a considerar que incluye, ahora, un componente reactivo cuya reactancia es variable con la pulsación según lo indica la Figura 2-1.

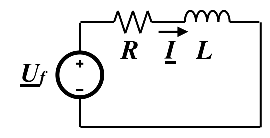


Figura 2-8: Circuito serie de resistor-inductor

Repitiendo el procedimiento aplicado en la sección anterior, la Ec. 2-5 muestra el cálculo de la corriente en el circuito en estudio que incluye un adecuado tratamiento algebraico.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_f}{(R + jX_L)} = \frac{\underline{U}_f}{R} \cdot \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega L}{R}\right)}$$ Ec. 2-5

Llamando $\underline{I}_0 = \underline{U}_f / R$[13], valor constante e independiente de la pulsación es decir la corriente cuando en el circuito no hay influencia reactiva (en este caso para $\omega = 0$), con lo que la Ec. 2-5 se transforma en la Ec. 2-6:

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_0}{\left(1 + j\frac{\omega L}{R}\right)}$$ Ec. 2-6

En la anterior formula, $L/R = \tau_L$[14] también es un valor constante independiente de la pulsación y su inversa puede considerarse una pulsación fija $\omega_L = 1/\tau_L$. Con esta consideración y mínima algebra, la Ec. 2-6 pasa a ser la Ec. 2-7:

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_0} = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{-1}$$ Ec. 2-7

En este resultado, operando como se hizo en la sección 8-1, llamando $\underline{\imath}_L = \underline{I}/\underline{I}_0$ y $x_L = \omega/\omega_L$, se obtiene:

$$\underline{\imath}_L = (1 + jx_L)^{-1}$$ Ec. 2-8

En este caso, en la Ec. 2-8 ambas variables[15] son adimensionales, dando a la misma validez universal para cualquier valor de $\underline{I}_0$ y de ω_L y habiéndose logrado los pasos 1º y 2º.

La recién mencionada expresión involucra variables complejas, y el cálculo del módulo de $\underline{\imath}_L$, Ec. 2-9, significa la amplitud de la corriente (módulo de $\underline{I}$) referida a la amplitud de dicha corriente cuando la pulsación de la señal de tensión aplicada es nula (módulo de $\underline{I}_0$). Notar que el módulo se expresa como $\imath_L$ sin subrayar es decir un número real.

$$\imath_L = |\underline{\imath}_L| = \left(1 + x_L{}^2\right)^{-0.5}$$ Ec. 2-9

En el caso del cálculo del argumento de $\underline{\imath}_L$, Ec. 2-10, se comprueba la diferencia entre el argumento de $\underline{I}$ y el argumento de $\underline{I}_0$, o sea la relación de fase entre las corrientes.

$$fase_{\underline{\imath}_L} = arg(\underline{\imath}_L) = -arctg(x_L)$$ Ec. 2-10

La gráfica de la Ec. 2-9 y de la Ec. 2-10 se muestra respectivamente en las Figuras 2-9 y 2-10 y ambas, como se anticipara en la sección 2-1, con la abscisa en escala logarítmica.[16]

---

13 El subíndice $_0$ es muy común para indicar esta corriente en la literatura del estudio de circuitos eléctricos.

14 Ver página 106, capítulo 6 de [1]

15 $\imath$ se elige como equivalente a la tradicional ordenada y y el subíndice $_L$ refiere al carácter inductivo del circuito pasivo serie.

16 El lector podría representar cualquiera de las dos expresiones en escala lineal para x_L y ver como resulta para valores entre 0 y 1.

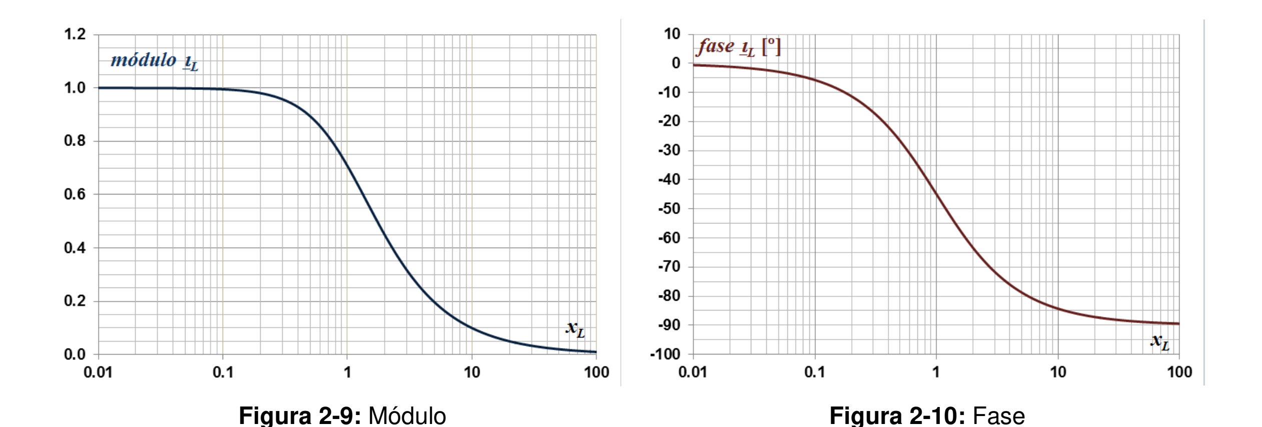


Figura 2-9: Módulo **Figura 2-10:** Fase

Ahora se puede estudiar qué sucede con las tensiones en cada uno de los componentes pasivos para completar el 4º paso anticipado al inicio de esta sección 8-2. Para tal fin el circuito de la Figura 2-8 se puede dibujar como se hizo con el divisor resistivo y se muestra en las Figuras 2-11 y 2-12.



Figura 2-11 **Figura 2-12**

Multiplicando ambos miembros de la Ec. 2-7 por R/R resulta la relación entre la "tensión de salida" y la "tensión de entrada" para el caso del circuito de la Figura 2-11, relación que tiene la misma expresión que la de la Ec. 2-7. En otras palabras todo lo analizado para $\underline{I}/\underline{I}_0$ en función de $\omega/\omega_L = x_L$ vale para $\underline{\upsilon}_{SR} = \underline{U}_{SR}/\underline{U}_f$.

Módulo y fase de la anterior relación de tensiones en función de x_L se representan idénticas a la Figuras 2-9 y 2-10.

Si ahora se multiplican ambos miembros de la Ec. 2-7 por $j\omega L/R = j\,\omega/\omega_L$ resulta la Ec. 2-11, siendo fácil verificar que la relación entre la "tensión de salida" y la "tensión de entrada", en este caso corresponde al circuito de la Figura 2-12.

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}\cdot\frac{j\omega L}{R} = \frac{\underline{U}_{SL}}{\underline{U}_f} = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{-1}\cdot j\frac{\omega}{\omega_L} \qquad \text{Ec. 2-11}$$

Teniendo en cuenta definiciones ya establecidas, la segunda parte de la igualdad de la anterior se transforma en la expresión adimensional de la Ec. 2-12, representativa de la función de transferencia que vincula las tensiones arriba mencionadas.[17]

[17] Acá υ representa la ordenada y el subíndice $_{SL}$ resulta obvio.

$$\underline{\upsilon}_{SL} = \frac{jx_L}{1 + jx_L} \qquad \text{Ec. 2-12}$$

Nuevamente el cálculo de módulo y fase en la Ec. 2-10 ilustra, respectivamente, sobre la relación de amplitud y desfasaje de la “tensión de salida” respecto de la “tensión de entrada” en función de la pulsación referida a la inversa de la constante de tiempo de la parte pasiva del circuito.

Para la determinación del nuevo módulo bastará con multiplicar el de la Ec. 2-8 por $\left| j\,\omega/\omega_L \right| = \omega/\omega_L = x_L$. Para obtener la fase, a la expresión de la Ec. 2-9 debe sumarse $arg\left(j\,\omega/\omega_L \right) = \pi/2 = 90°$. Lo dicho da las Ec. 2-13 y 2-14.

$$\upsilon_{SL} = \left|\underline{\upsilon}_{SL}\right| = \frac{x_L}{\sqrt{1 + {x_L}^2}} \qquad \text{Ec. 2-13}$$

$$fase_{\underline{\upsilon}_L} = arg\left(\underline{\upsilon}_L\right) = -arctg\left(x_L\right) + \pi/2 \qquad \text{Ec. 2-14}$$

Y las gráficas de las anteriores expresiones se aprecian en las Figuras 2-13 y 2-14 respectivamente.

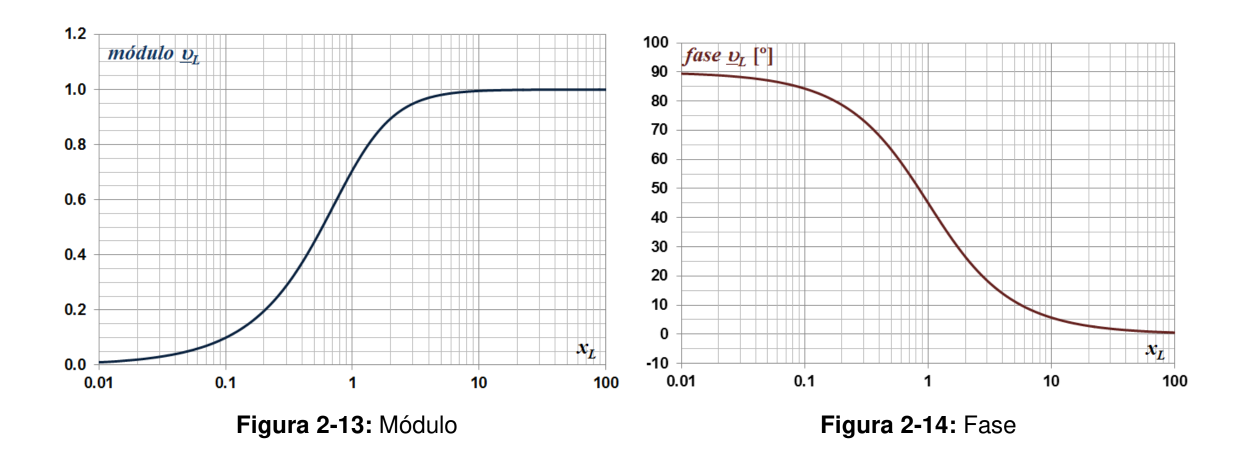


Figura 2-13: Módulo

Figura 2-14: Fase

Conclusiones que surgen del análisis del módulo y fase de las funciones de transferencia también pasan al final de esta sección 2.2.

2.2.3 Serie de resistor-capacitor

El circuito en estudio, ahora con un componente reactivo con reactancia variable con la pulsación según la Figura 2-2, es el de la Figura 2-15.

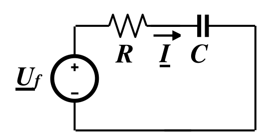


Figura 2-15: Circuito serie de resistor-capacitor

Repitiendo el análisis de la sección anterior, con obvias justificaciones, resultan las siguientes expresiones:

La Ec. 2-15 muestra el cálculo de la corriente en el circuito.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_f}{\left(R - jX_C\right)} = \frac{\underline{U}_f}{R} \cdot \frac{1}{\left(1 - j\dfrac{1}{\omega CR}\right)} \qquad \text{Ec. 2-15}$$

Teniendo en cuenta ahora $\underline{I}_0 = \underline{U}_f / R$ (para este circuito $\underline{I}_0$ es la corriente cuando $\omega \to \infty$) la anterior se transforma en la Ec. 2-16.

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_0}{\left(1 - j\dfrac{1}{\omega CR}\right)} \qquad \text{Ec. 2-16}$$

Y con $\omega_C = 1/\tau_C = 1/(RC)$ resulta la Ec. 2-17:

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_0} = \left(1 - j\frac{\omega_C}{\omega}\right)^{-1} \qquad \text{Ec. 2-17}$$

Por último, llamando $\underline{\iota}_C = \underline{I}/\underline{I}_0$ y $x_C = \omega/\omega_C$, se obtiene:

$$\underline{\iota}_C = \left(1 - \frac{j}{x_C}\right)^{-1} = \frac{x_C}{1 + jx_C} \qquad \text{Ec. 2-18}$$

Nuevamente, en la Ec. 2-18, ambas variables son adimensionales, completándose el estudio calculando módulo (Ec. 2-19) y fase (Ec. 2-20) de $\underline{\iota}_C$ con igual significado de dichos valores al explicado en la sección anterior.

$$\iota_C = \left|\underline{\iota}_C\right| = \frac{x_C}{\sqrt{1 + x_C{}^2}} \qquad \text{Ec. 2-19}$$

$$fase_{\underline{\iota}_C} = arg\left(\underline{\iota}_C\right) = -arctg\left(-1/x_C\right) = \pi/2 - arctg\left(x_C\right) \qquad \text{Ec. 2-20}$$

Es de inmediata comprobación la equivalencia matemática de la Ec. 2-19 y la Ec. 2-13 y de la Ec. 2-20 y la Ec. 2-14, por lo que cambiando (o aplicando dualidad) el significado de $\underline{\iota}_L$ por υ_C y x_L por x_C, las curvas de las Figuras 2-13 y 2-14 dan los respectivos módulo y fase.

Para las tensiones en cada uno de los componentes pasivos, también en este estudio el circuito de la Figura 2-15 se puede dibujar como se muestra en las Figuras 2-16 y 2-17.



Figura 2-16: **Figura 2-17:**

El lector está en los cierto en afirmar que, para el circuito de la Figura 2-16, la ya indicada relación entre la “tensión de salida” y la “tensión de entrada” $\underline{\upsilon}_{SR}$ es la misma expresión que la de la Ec. 2-18 (equivalente a la de la Ec. 2-13) y la representación de módulo y fase de la misma de las Figuras 2-13 y 2-14.

Y nuevamente, multiplicando ambos miembros de la Ec. 2-15 por $-j/\omega CR = -j\,\omega_C/\omega$ resulta la Ec. 2-19, o sea la función de transferencia $\underline{\upsilon}_{SC}$, en este caso para del circuito de la Figura 2-17.

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}\cdot\frac{-j}{\omega CR}=\frac{\underline{U}_{SC}}{\underline{U}_f}=\left(1-j\frac{\omega_C}{\omega}\right)^{-1}\cdot\left(-j\frac{\omega_C}{\omega}\right) \qquad \text{Ec. 2-21}$$

Teniendo en cuenta la definición de x_C, la segunda parte de la igualdad de la anterior se transforma en la expresión adimensional de la Ec. 2-22, o sea la función de transferencia que vincula las tensiones mencionadas antes de la Ec. 2-21.

$$\underline{\upsilon}_{SC}=\left(1+jx_C\right)^{-1} \qquad \text{Ec. 2-22}$$

La Ec. 2-22 resulta equivalente a la Ec. 2-8, por lo que las curvas de las Figuras 2-9 y 2-10 representan respectivamente el módulo y fase de esta última expresión.

Es importante aclarar que en la referencia a las Figuras 2-9 y 2-13 hecha para los módulos de cada relación en el circuito RC, deben cambiarse υ_{SL} por ι_C y ι_L por υ_{SC}. Lo mismo para la fase y las Figuras 2-10 y 2-14.

2.2.4 Resumen y conclusiones

La Tabla 2-1 muestra el resumen de las fórmulas adimensionales que permiten calcular las funciones de transferencia de tensión de los circuitos estudiados en 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3. En la misma se indican también parámetros particulares relevantes asociados a dichos cálculos y la referencia a los gráficos representativos de módulo y fase de las mencionadas funciones.

Tabla 2-1: Resumen de fórmulas y referencias a gráficos

Circuito (figura)	Parámetros particulares relevantes		Función de transferencia	Módulo (figura)	Fase (figura)
R_2, R_1 (2-6)	-	-	$\frac{\underline{U}_{R1}}{\underline{U}_f}=\frac{R_1}{R_1+R_2}$	-	-
R_1, R_2 (2-7)	-	-	$\frac{\underline{U}_{R2}}{\underline{U}_f}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$	-	-
R, L (2-11)	$\omega_L=\frac{R}{L}$	$x_L=\frac{\omega}{\omega_L}$	$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_f}=\frac{jx_L}{(1+jx_L)}$	$\left(1+x_L^2\right)^{-0,5}\cdot x_L$ (2-9)	$\pi/2-arctg(x_L)$ (2-10)
L, R (2-12)			$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_f}=\frac{1}{(1+jx_L)}$	$\left(1+x_L^2\right)^{-0.5}$ (2-13)	$-arctg(x_L)$ (2-14)
R, C (2-16)	$\omega_C=\frac{1}{RC}$	$x_C=\frac{\omega}{\omega_C}$	$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_f}=\frac{1}{(1+jx_C)}$	$\left(1+x_C^2\right)^{-0.5}$ (2-13)	$-arctg(x_C)$ (2-14)
C, R (2-17)			$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_f}=\frac{jx_C}{(1+jx_C)}$	$\left(1+x_C^2\right)^{-0,5}\cdot x_C$ (2-9)	$\pi/2-arctg(x_C)$ (2-10)

En los dos casos del divisor resistivo la representación de módulo y fase se explicó al final de la sección 2.2.1 y es fácil comprobar que los módulos de las respectivas funciones de transferencia, para valores finitos de las resistencias, siempre son menores que la unidad.

Del párrafo anterior se concluye que, si se considera una fuente de señal de tensión senoidal de diferentes pulsaciones que se conecta a través de un resistor (por ejemplo R_1) en serie con otro (R_2), la tensión en este último es una fracción constante de la de la fuente y en fase cualquiera sea el valor de la pulsación.

Esta característica mostrada confirma además la ausencia de valores de pulsación y de tensión que se puedan usar como referencia.

Si ahora, la mencionada fuente de tensión se conecta a un resistor, por ejemplo mediante un inductor o un capacitor, se tienen los circuitos estudiados a partir de las Figuras 2-12 y 2-17.

Los resultados adimensionales del módulo y la fase en función de la pulsación referida a la inversa de la constante de tiempo, de valor fijo y propia de la parte pasiva del circuito (variables x_L y x_C), permiten la comparación de esos resultados; las Figuras 2-9, 2-10, 2-13 y 2-14 muestran que no son curvas constantes.

En efecto, las Tablas 2-2 y 2-3 consignan algunos valores particulares, diferentes entre sí, para distintos valores de x_L y x_C, respectivamente.

Tabla 2-2: Valores particulares del módulo y fase del circuito de la Figura 2-12

	$\omega = 0$ ó $x_L = 0$	$\omega = \omega_L$,ó $x_L = 1$	$\omega \to \infty$ ó $x_L = \infty$
Relación de módulos (Figura 2-9)	1	$\sqrt{2}/2$	0
Fase (Figura 2-10)	0°	-45°	-90°

Tabla 2-3: Valores particulares del módulo y fase del circuito de la Figura 2-17

	$\omega = 0$ ó $x_C = \infty$	$\omega = \omega_C$,ó $x_C = 1$	$\omega \to \infty$ ó $x_C = 0$
Relación de módulos (Figura 2-13)	0	$\sqrt{2}/2$	1
Fase (Figura 2-14)	90°	45°	0°

Un valor particular interesante para ambas variaciones del módulo, una decreciente y la otra creciente con la abscisa, es $\sqrt{2}/2$ cuando dicha abscisa vale 1[18].

Respecto al desfasaje, la tensión en el resistor está atrasada (aumentando) respecto de la fuente cuando el módulo decrece y viceversa.

Un último resultado novedoso es que el circuito con la conexión inductiva (Figura 2-11) se comporta como un “filtro” que hace que las amplitudes (módulo) de la tensión en el resistor sean cercanas y hasta el $70\,\%$ del valor de la fuente para pulsaciones $\omega \leq \omega_L$. En cambio con

[18] Nuevamente aparece el valor constante $\sqrt{2}/2$, valor fácil de determinar con cualquiera de las expresiones de los módulos.

con la conexión capacitiva (Figura 2-16) el "filtro" origina tensiones en el resistor de más del $70\,\%$ y hasta cercanas a la fuente para $\omega \leq \omega_C$.

Acaban de presentarse dos ejemplos iniciales básicos de lo que en este caso se denominan filtros *pasa bajo* y *pasa alto* en los que, se reitera, en el primero las señales en el resistor están desfasadas en atraso (limite en fase cuando $\omega = 0$) y en el segundo están desfasadas en adelanto (límite en fase cuando $\omega \to \infty$).

Otros valores que se invita a verificar son:

- Filtro pasa bajo para $x_L < 1/3$: módulo de la función de transferencia $> 0{,}95$ y $\to 1$; fase $>$ -18,5° y $\to 0$.
- Filtro pasa alto para: $x_C > 3$ módulo de la función de transferencia $> 0{,}95$ y $\to 1$; fase $< 18{,}5°$ y $\to 0$.

Así mismo se plantea para el lector analizar cuál es el comportamiento como filtro de tensión de los circuitos de las Figuras 2-12 y 2-17.

Por último se propone el uso de dualidad, ya visto en [1], o equivalencia de fuentes reales[19] para transformar los circuitos serie estudiados en circuitos paralelo alimentados por fuentes de corriente y, validando adecuadamente en los mismos todos los comentarios y conclusiones arribadas en los primeros, tener el estudio de filtros de señales de corriente.

En definitiva en el estudio del comportamiento con la pulsación del circuito con inductor de la Figura 2-12 se comprobó la característica pasa bajo de la tensión en el resistor con fase en atraso. Para el caso con capacitor, Figura 2-17, en cambio, pasa alto y en adelanto.

¿Cómo será el resultado si se incluyen en serie ambos componentes reactivos? La sección siguiente se ocupa de responder la pregunta.

2.3 Conexión serie de resistor, inductor y capacitor

La Figura 2-18 muestra el circuito a estudiar con los tres elementos conectados en serie. Nuevamente a fuente de tensión es alterna senoidal de pulsación variable de cero a infinito pero de valor máximo U_f y fijo para cualquier valor de la pulsación.

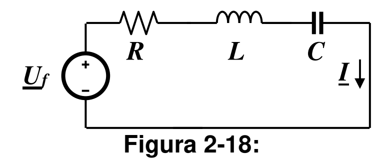


Figura 2-18:

Siguiendo el mismo proceder que en los circuitos de la sección 2.2, corresponde el cálculo de la corriente en el circuito con el resultado de la Ec. 2-23 también con el mismo tipo de tratamiento algebraico subsiguiente.

---

19 Ver sección 3.4.4, Capítulo 3 de [1].

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_f}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\underline{U}_f}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)\left(1 - \dfrac{1}{\omega^2 LC}\right)} \qquad \text{Ec. 2-23}$$

Dado que los elementos reactivos están conectados existe la posibilidad de oscilación con la pulsación propia $\omega_0 = (L \cdot C)^{-0,5}$, que en el reordenamiento algebraico aparece explícita y puede tomarse como pulsación de referencia. Esto transforma la anterior expresión en la de la Ec. 2-24.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_f}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)\left(1 - \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)} = \frac{\underline{U}_f}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \qquad \text{Ec. 2-24}$$

Para completar el objetivo de conseguir una expresión adimensional, o sea universal, se designa $Q = \omega_0 L / R$, $\underline{I}_0 = \underline{U}_f / R$, $x_{LC} = \omega / \omega_0$ e $\underline{\imath}_{LC} = \underline{I} / \underline{I}_0$ con lo cual la Ec. 2-24 pasa a ser la Ec. 2-25.

$$\underline{\imath}_{LC} = \left(1 + jQ\left(x_{LC} - \frac{1}{x_{LC}}\right)\right)^{-1} \qquad \text{Ec. 2-25}$$

Antes de seguir con la determinación de módulo y fase de la expresión conseguida, un poco más de análisis de los parámetros involucrados en las variables adimensionales resultantes.

Q es la relación entre la reactancia inductiva para $\omega = \omega_0$ y R, obviamente igual a la de la reactancia capacitiva para $\omega = \omega_0$ y R. También puede calcularse como $Q = \sqrt{L/C}/R$, depende solo del valor de los elementos pasivos y varía entre 0 ($R \to \infty$) e ∞ ($R \to 0$). Se denomina habitualmente ***factor de calidad*** (en inglés ***quality***, cuya inicial da su identificación) o también ***factor de mérito*** y está relacionado con algunas características de la respuesta del circuito que se verán más adelante.

$\underline{I}_0$ es la corriente en el circuito cuando la pulsación de la fuente es $\omega = \omega_0$. Dado que en dicha circunstancia el módulo de ambas reactancias son iguales, al restarse hacen que el circuito tenga característica solo representada por R o lo que es lo mismo la corriente está en fase con la tensión aplicada.[20]

Por último, cuando $\omega = \omega_0$ la fuente de tensión está excitando el circuito con la misma pulsación que la natural o de oscilación propia. En esta circunstancia, por analogía con la vibración sonora de una cuerda, ω_0 representaría la pulsación a la que “suena” el circuito y al excitarlo con la misma pulsación dicho circuito “re suena” o está en **resonancia**. Ya se vio que en esta condición particular el circuito se comporta como no reactivo, presentando la corriente $\underline{I}_0$ otros detalles que también se verán más adelante.

Ahora sí, el módulo y fase de la Ec. 2-25, con los mismos significados ya dados en la sección 2.2, son respectivamente los de la Ec. 2-26 y Ec. 2-27.

---

[20] Vale respecto a esta corriente lo ya dicho de las correspondientes estudiadas en los circuitos LR y CR, y respecto de su subíndice la referencia hecha en el pie de página [5]

$$\left|\underline{\iota}_{LC}\right| = \iota_{LC} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\cdot\left(x_{LC}-\frac{1}{x_{LC}}\right)^2}} \qquad \text{Ec. 2-26}$$

$$fase_{\iota_{LC}} = \text{-}arctg\left(Q\cdot\left(x_{LC}-\frac{1}{x_{LC}}\right)\right) \qquad \text{Ec. 2-27}$$

La Figura 2-19 muestra la representación de la Ec. 2-26 y la Figura 2-19 la correspondiente de la Ec. 2-27, en ambos gráficos para 3 valores diferentes de Q y reiterando la característica universal de los mismos y también la escala logarítmica para las nuevas abscisas.

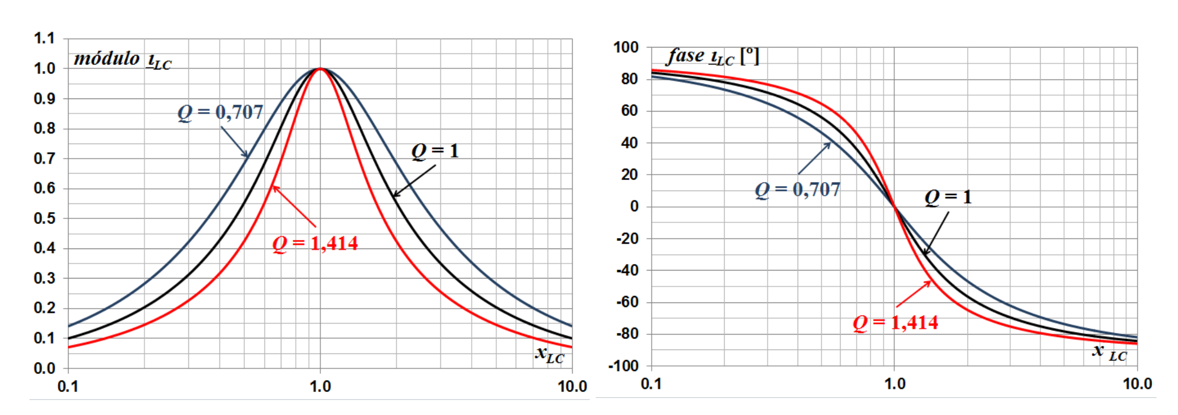


Figura 2-19: Curva universal de módulo (Circuito R, L, C)

Figura 2-20: Curva universal de fase (Circuito R, L, C)

Un primer detalle obvio es que, en resonancia e independiente del valor de Q, el módulo de $\underline{I}/\underline{I}_0$ es máximo e igual a la unidad y la fase es nula. En otras palabras, la corriente es máxima y está en fase con la fuente de tensión.

Otro aspecto, en particular de la Figura 2-19, se analiza en la siguiente sección.

2.3.1 Ancho de Banda

En efecto, en la mencionada Figura 2-19, se aprecia que las curvas son más estrechas cuando aumenta Q. Para evaluar esta característica se establece como referencia la separación de abscisas para $\iota_{LC} = \sqrt{2}/2$. Dado que $x_{LC} = \omega/\omega_0$ la separación que resulte estará referida a ω_0 definiendo un ***ancho de banda relativo*** AB/ω_0, con carácter adimensional y como se aprecia en la Figura 2-21.

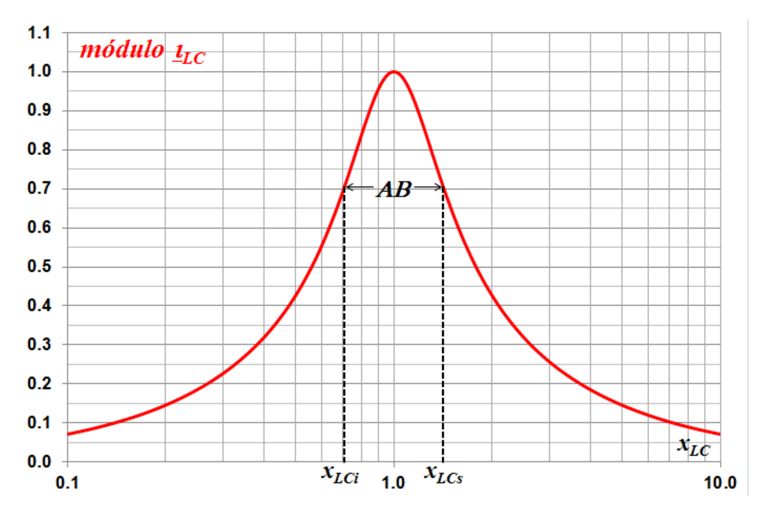


Figura 2-21: Ancho de banda

La anterior referencia se cumple para dos valores de x_{LC}, $x_{LCs} > 1$ y $x_{LCi} < 1$ límites superior e inferior de dicho ancho (subíndices $_s$ e $_i$ respectivamente) de modo que $AB/\omega_0 = x_{LCs} - x_{LCi}$. En otras palabras, para dichos valores de x_{LC} la Ec. 2-26 resulta $\iota_{LC}^{-2} = 2$ con los resultados siguientes:

$$x_{LCs} - \frac{1}{x_{LCs}} = +\frac{1}{Q} \qquad x_{LCs}^2 - \frac{x_{LCs}}{Q} - 1 = 0 \qquad \text{Ec. 2-28}$$

$$x_{LCi} - \frac{1}{x_{LCi}} = -\frac{1}{Q} \qquad x_{LCi}^2 + \frac{x_{LCi}}{Q} - 1 = 0 \qquad \text{Ec. 2-29}$$

Tomando solo las soluciones positivas de la 2ª parte de las Ec. 2-28 y 8-29, da:

$$x_{LCs} = \frac{1 + \sqrt{4Q^2 + 1}}{2Q} \qquad x_{LCi} = \frac{-1 + \sqrt{4Q^2 + 1}}{2Q} \qquad \text{Ec. 2-30}$$

El ejemplo presentado en la Figura 2-21 corresponde a $Q = \sqrt{2}/2$ que en la Ec. 2-30 da $x_{LCs} = \sqrt{2}$ y $x_{LCi} = \sqrt{2}/2$. Para este caso y para todo Q se cumple que $x_{LCs} - x_{LCi} = AB/\omega_0 = 1/Q$ (corroborando lo mostrado en las curvas de la Figura 2-19) y que $x_{LCs} \cdot x_{LCi} = 1$. De esta última expresión puede verificarse que $\sqrt{\omega_{LCs} \cdot \omega_{LCi}} = \omega_0$ o lo que es lo mismo que decir que ω_0 es la media geométrica de los extremos de AB, para la que se cumple $log\ \omega_0 = \dfrac{log\ \omega_{LCs} + log\ \omega_{LCi}}{2}$.

Este último comentario matemático hace que estas abscisas límite se "vean" simétricas en la Figura 2-19 como consecuencia de la escala de graficación logarítmica usada.

La Figura 2-22 grafica AB/ω_0 junto con x_{LCi} y x_{LCs} función de Q en la que, sin embargo, se puede verificar valores cuasi simétricos (con error menor que 1%) para valores de $Q > 5$, o sea $\dfrac{\omega_{LCs} + \omega_{LCi}}{2} \cong \omega_0$.

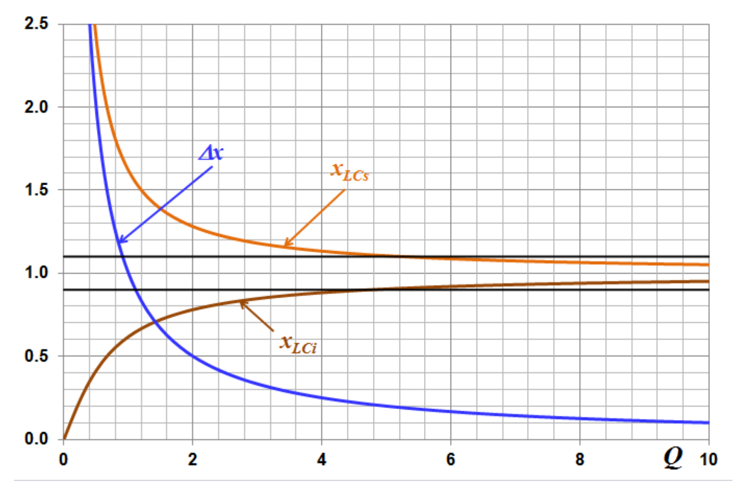


Figura 2-22: Ancho de banda relativo y sus límites en función de Q

La curva del ι_{LC} en la que se determina el *ancho de banda relativo*, representa la relación de los módulos de I/I_0 . Es fácil comprobar que el cuadrado de esta relación corresponde a la relación entre la potencia en R para cualquier ω referida a dicha potencia cuando el circuito serie *resuena*. Para las pulsaciones que determinan x_{LCi} y x_{LCs}, $\iota_{LC} = \sqrt{2}/2$, por lo tanto $\mathrm{P}/\mathrm{P}_0 = 1/2$.

Con este dato particular, al haber considerado la potencia función de la pulsación, es correcto afirmar que para valores de esta pulsación por fuera de AB , $\mathrm{P}/\mathrm{P}_0 < 1/2$, mientras que para aquellos dentro de AB , $\mathrm{P}/\mathrm{P}_0 > 1/2$.

En definitiva, el dato de *potencia mitad* al final del párrafo ante anterior, puede también ser usado como referencia para la definición de AB . La Figura 2-23 ilustra lo explicado en los dos párrafos anteriores.

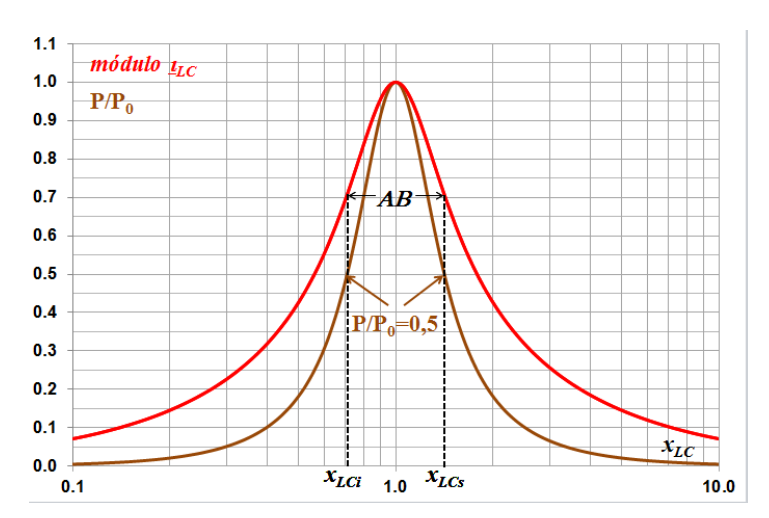


Figura 2-23: Ancho de banda y P/P_0

Cualquiera sea el planteo de inicio, valen las siguientes conclusiones:

Para todo Q	Para $Q \geq 5$ y con error $\leq 1\%$
$AB = \omega_{LCs} - \omega_{LCi} = \omega_0 / Q$ $\omega_{LCs} \cdot \omega_{LCi} = {\omega_0}^2$	$\omega_{LCs} + \omega_{LCi} = 2 \cdot \omega_0$

Hasta ahora se han estudiado aspectos derivados de como varía la corriente para diferentes valores de la pulsación, pero ¿cómo será la variación de la tensión en cada componente?

2.3.2 Tensión en cada componente

Para responder la pregunta recién formulada, a partir de la Ec. 2-25 que da $\underline{\iota}_{LC} = f\left(x_{LC}\right)$ con parámetro Q, se puede obtener como resultan las tensiones en cada componente en relación con $\underline{U}_f$.

En efecto, multiplicando ambos miembros de la recién mencionada formula por R/R, por $j\omega L/R$ y por $1/j\omega RC$ surgen respectivamente las consecuencias mostradas en la Ec. 2-31.

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}\frac{R}{R} = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_f} = \underline{\upsilon}_R = \frac{1}{1 + jQ \cdot \left(x_{LC} - \dfrac{1}{x_{LC}} \right)}$$

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}\frac{j\omega L}{R} = \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_f} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{j\omega_0 L}{R} = \underline{\upsilon}_L = \frac{jQx_{LC}}{1 + jQ \cdot \left(x_{LC} - \dfrac{1}{x_{LC}} \right)} \qquad \text{Ec. 2-31}$$

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}\frac{1}{j\omega RC} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_f} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}\frac{\omega_0}{\omega}\frac{1}{j\omega_0 RC} = \underline{\upsilon}_C = \frac{-jQ/x_{LC}}{1 + jQ \cdot \left(x_{LC} - \dfrac{1}{x_{LC}} \right)}$$

La nomenclatura para las nuevas relaciones de tensión se basa en el pie de página [9]. Respecto al módulo y fase de las anteriores relaciones de tensión, es fácil verificar los siguientes pares de resultados en la Ec. 2-32:

$$\left|\underline{\upsilon}_R\right| = \upsilon_R = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(x_{LC} - \dfrac{1}{x_{LC}} \right)^2}} \qquad fase_{\underline{\upsilon}_R} = -arctg\left(Q \cdot \left(x_{LC} - \frac{1}{x_{LC}} \right) \right)$$

$$\left|\underline{\upsilon}_L\right| = \upsilon_L = \frac{x_{LC}Q}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(x_{LC} - \dfrac{1}{x_{LC}} \right)^2}} \qquad fase_{\underline{\upsilon}_L} = \frac{\pi}{2} - arctg\left(Q \cdot \left(x_{LC} - \frac{1}{x_{LC}} \right) \right) \qquad \text{Ec. 2-32}$$

$$\left|\underline{\upsilon}_C\right| = \upsilon_C = \frac{Q/x_{LC}}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(x_{LC} - \dfrac{1}{x_{LC}} \right)^2}} \qquad fase_{\underline{\upsilon}_C} = -\frac{\pi}{2} - arctg\left(Q \cdot \left(x_{LC} - \frac{1}{x_{LC}} \right) \right)$$

En las Figuras 2-24 se muestran las gráficas de υ_R , υ_L y υ_C (módulos) en función de x_{LC} para cuatro valores significativos de Q que luego serán analizadas. En cada figura también están dibujadas la variacion de X_L/R , X_C/R y Z/R con x_{LC} , por su relevancia, como se verá. En todos los casos, tal como se anticipara, la escala de x_{LC} es logarítmica.

A posteriori del análisis de las figuras mencionadas arriba, se presentarán las curvas de la fase, correpondientes al segundo grupo de la Ec. 2-32.

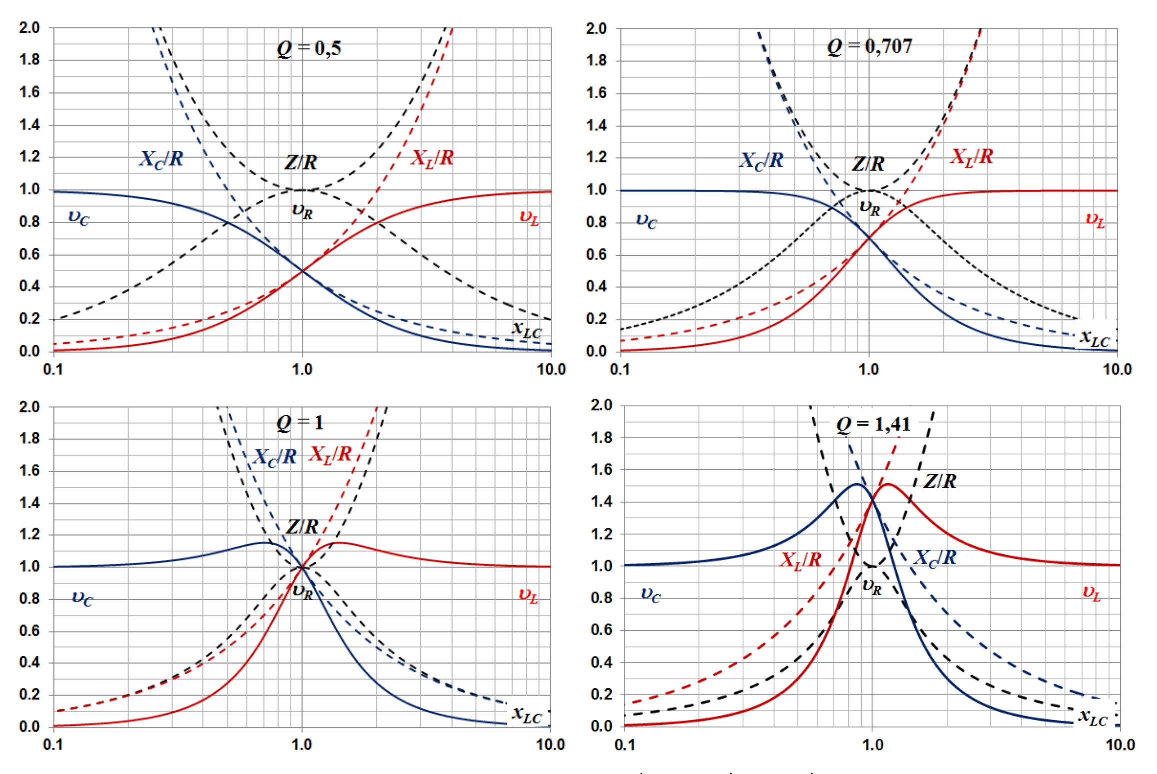


Figura 2-24: Módulo de υ_R , υ_L y υ_C junto a X_L/R , X_C/R y Z/R para diferentes Q

De la observación de las figuras anteriores, atendiendo las fórmulas y valores de parámetros que las generan, surgen los siguientes detalles.

- Los diferentes valores de Q en aumento determinan, en las cuatro figuras, la ya explicada disminución del AB (más estrechas las curvas de $\upsilon_R = \imath_{LC}$).
- Se aprecia también que la forma de variación de υ_L y υ_C es sensible al valor de Q , mostrando en las dos gráficas inferiores de la Figuras 2-24 que las tensiones en los elementos reactivos resultan mayores que la tensión aplicada en un cierto rango de variación de la pulsación.

- Estas ***sobretensiones*** son mayores y para rango más extenso de ω a mayor valor de Q, a partir de que este parámetro vale $\sqrt{2}/2$ [21]. Esta situación debe ser atendida en la práctica, en especial para la especificación de la tensión a soportar por los elementos reactivos.
- Los dos anteriores detalles, muestran un comportamiento particular de este tipo de circuito serie (R, L, C) respecto al valor de las tensiones en cada componente. Debe quedar claro que la *LKT* no deja de cumplirse dado que las tensiones en los elementos reactivos son siempre opuestas y por lo tanto se restan.
- A partir de la 2ª y 3ª fórmula de la 1º columna de la Ec. 2-23, independiente de Q, además resulta $\upsilon_L(x_{LC})/\upsilon_C(x_{LC}) = x_{LC}^{\ 2}$.
- Es fácil verificar que, para $x_{LC} = 1$ es decir $\omega = \omega_0$, resulta $\upsilon_L(1) = \upsilon_C(1) = Q$, detalle gráfico apreciable en el total de la Figuras 2-24. La ordenada del cruce de υ_L y υ_C a partir de $Q > \sqrt{2}/2$, está asociada a que las tensiones de los elementos reactivos superan a la de la fuente U_f (gráficas inferiores).
- En las dos graficas superiores de la Figura 2-24 se aprecia que las curvas de X_L/R y X_C/R resultan asíntotas exteriores de la curva Z/R, o lo que es lo mismo siempre $Z > X_L$ y $Z > X_C$. Ante la misma corriente del circuito serie también se cumple $(I \cdot Z = U_f) > (I \cdot X_L = U_L)$ e $(I \cdot Z = U_f) > (I \cdot X_C = U_C)$ es decir que no hay sobretensión.
- En cambio, en las dos gráficas inferiores de la Figuras 2-24 con $Q > \sqrt{2}/2$, se nota que hay franjas de pulsación (x_{LC}) en que las curvas de X_L/R y X_C/R están dentro de la curva Z/R. Con este detalle y un razonamiento análogo del punto anterior se concluye que mientras $Z < X_L$ y $Z < X_C$ hay sobretensión en los elementos reactivos correspondientes. El máximo valor de sobretensión puede calcularse mediante lo indicado en [13]. Sin embargo, de las mencionadas figuras puede inferirse que dichos máximos se van acercando al valor de Q a medida que este parámetro aumenta. La Figura 2-25 a la izquierda muestra esta situación para $Q = 5$, mostrando a la derecha un detalle de tales máximos.

[21] El valor $Q \leq \sqrt{2}/2$ para que no haya sobretensión en los elementos reactivos surge de hacer el correspondiente estudio de máximos y mínimos de las funciones $\upsilon_L(x_{LC})$ y $\upsilon_C(x_{LC})$.

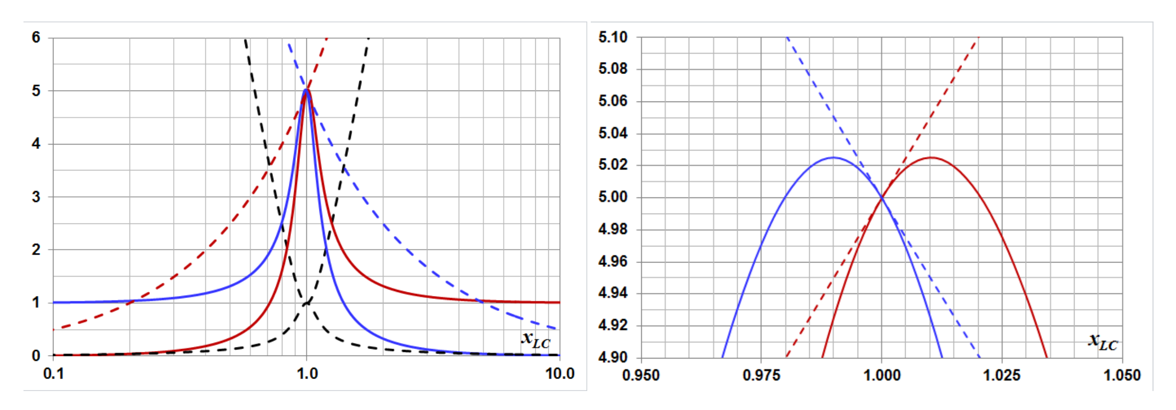


Figura 2-25: Izquierda, ídem Figura 2-24 para $Q=5$. Derecha, zoom en la coordenada (1,5)

Respecto a la fase de las relaciones de tensión estudiadas, las fórmulas de la 2ª columna de la Ec. 2-32 muestran que para los elementos reactivos es la misma que la de $\upsilon_R = \iota_{LC}$ $+\pi/2$ en el inductor y $-\pi/2$ en el capacitor. La Figura 2-26, muestra estos resultados indicando la fase en grados sexagesimales, como en los otros casos vistos, por razones prácticas habituales de los lectores.

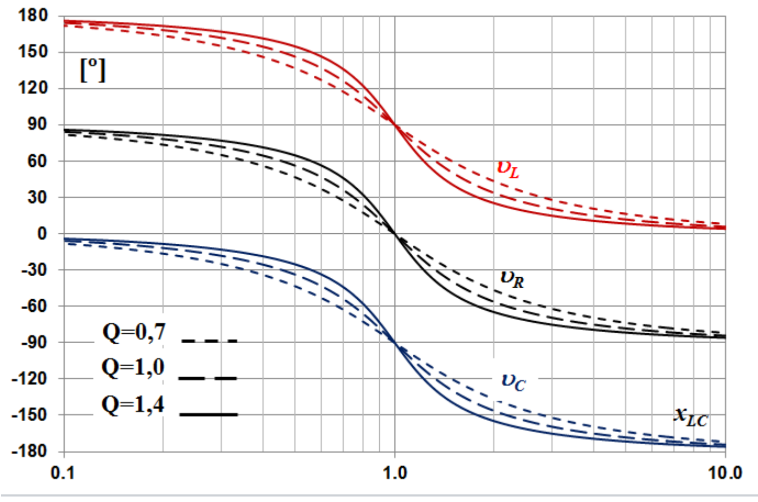


Figura 2-26: Fase de υ_R, υ_L y υ_C para diferentes Q

Se sugiere comprobar lo mostrado en las gráficas anteriores haciendo los diagramas fasoriales de tensiones y corriente en el circuito.

Un detalle interesante es la variación más abrupta de la fase en $x_{LC} = 1$ ($\omega = \omega_0$) a mayor valor de Q.

En la sección siguiente se analiza el comportamiento de la versión paralelo y su aplicación, ya histórica, como filtro.

2.4 Circuito paralelo

La Figura 2-27 muestra el circuito a estudiar con los tres tipos de componentes pasivos en paralelo y alimentados en este caso por una fuente de corriente alterna senoidal de pulsación variable de cero a infinito pero de valor máximo I_f y fijo para cualquier valor de la pulsación.

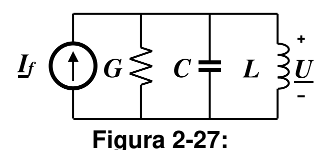


Figura 2-27:

2.4.1 Análisis del circuito paralelo

Existen dos caminos de estudio del circuito de la Figura 2-27.

Repetir todas las propuestas y procedimientos seguidos en la sección 2.3, opción que se deja al lector como repaso y afirmación de conocimientos.

Otra forma de conseguir igual objetivo es aplicando el ya varias veces propuesto método de dualidad.

Haciendo los cambios que se enuncian en la Tabla 2-4, valen todas las fórmulas y gráficos vistos en la sección 2.3 con referencia al circuito de la Figura 2-27.

Tabla 2-4: Cambios de parámetros para validar los resultados del circuito paralelo utilizando dualidad

Circuito	Parámetros													
Serie	$\underline{U}_f$	$\underline{I}$	R	L	C	$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_f}{R}$	$\underline{i}_{LC} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}_0}$	$\underline{v}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_f}$	$\underline{v}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_f}$	$\underline{v}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_f}$	$\frac{X_L}{R}$	$\frac{X_C}{R}$	$\frac{Z}{R}$
Paralelo	$\underline{I}_f$	$\underline{U}$	G	C	L	$\underline{U}_0 = \frac{\underline{I}_f}{G}$	$\underline{v}_{CL} = \frac{\underline{U}}{\underline{U}_0}$	$\underline{i}_G = \frac{\underline{I}_G}{\underline{I}_f}$	$\underline{i}_C = \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}_f}$	$\underline{i}_L = \frac{\underline{I}_L}{\underline{I}_f}$	$\frac{B_C}{G}$	$\frac{B_L}{G}$	$\frac{Y}{G}$

A continuación se realizan aclaraciones adicionales, algunas de ellas obvias.

El eje de abscisas representa en este caso $x_{CL} = x_{LC} = \omega/\omega_0$, siendo $\omega_0 = (C \cdot L)^{-0,5}$ la pulsación propia, natural o de resonancia del circuito paralelo.

Respecto del *factor de calidad*, los cambios que resultan como consecuencia de aplicar dualidad indican que $Q = \omega_0 C/G = \sqrt{C/L}/G$. Este resultado muestra que Q aumenta cuando G disminuye, dual de lo que sucede en el circuito serie. Sin embargo, no es habitual que se indiquen los componentes pasivos no reactivos en paralelo como G sino como R. Esto determina que, en la etapa de aprendizaje, sea frecuente una rápida generalización de la definición del factor de calidad dependiendo de la inversa de R lo que es obviamente erróneo.

Por último, el ancho de banda de la curva del módulo $\underline{v}_{CL} = \underline{U}/\underline{U}_0$, definida de la misma forma que en la sección 2.3.2, resulta también $AB = \omega_0/Q$.

Como se anticipara, resta presentar el comportamiento como filtro del circuito resonante. En la próxima sección se verá un ejemplo de esta característica usando la versión paralelo, siendo válido por dualidad para el circuito serie.

2.5 Filtro

Si bien el enfoque digital -ya vigente en el actual siglo XXI y fuera de la temática de este libro- se ocupa de presentar la información y su selección, la transmisión de radio en Amplitud Modulada (AM) es un buen ejemplo para ver como un circuito resonando a diferentes ω_0 permite que se escuche una emisora en particular.

Para el lector que la desconozca sigue una breve y sencilla descripción de ese tipo de transmisión radial.

Supóngase tres emisoras que transmiten en tres frecuencias diferentes. Esto se traduce en que cada una de sus respectivas antenas de emisión pone en el aire tres ondas electromagnéticas que son respectivas oscilaciones senoidales de campo eléctrico y magnético análogas y cada una con la frecuencia de su correspondiente emisora.

Como ejemplo simplificado de la información asociada a cada emisora, cada una de las tres, modula su señal de transmisión cambiando su amplitud en el tiempo al ritmo de una sinusoide de frecuencia mucho menor.

Las ondas resultantes en el espacio, inducen en la antena de un receptor de radio tres señales sinusoidales también análogas y de igual pulsación que las originales, las que podrían representarse por tres fuentes de corriente senoidal de diferente variación de amplitud sumadas.

Esta fuente equivalente total recién descripta, no es otra que la supuesta en la propuesta de análisis recién realizada del circuito resonante paralelo. El detalle de valor máximo I_f fijo (dual del valor máximo U_f fijo en el circuito serie) es una simplificación para el estudio inicial. Para aplicar los resultados de dicho análisis en el ejemplo presentado basta tomar sucesivos intervalos de tiempo en los que puede considerarse la señal cuasi constante.

En esta situación, el circuito resonante paralelo asociado a la fuente análoga a las tres emisoras "juntas" puede "seleccionar" cada una si se fija para el mismo la misma pulsación propia que la de transmisión de cada emisora de radio.

Esta posibilidad de selección es consecuencia de la respuesta "pasa banda "con la pulsación analizada en detalle en la sección 2.3, acá obtenida por dualidad.

Un ejemplo numérico ilustrativo, pero que no corresponde a los casos reales de transmisión radial, es el que sigue:

La pulsación de cada "transmisión" es: $10\,\text{krad/s}$, $20\,\text{krad/s}$, y $40\,\text{krad/s}$.

Los datos fijos del circuito pasivo: $L = 0{,}1\,\text{mH}$ y el equivalente conductivo asociado a la fuente de corriente $G = 0{,}1\,\text{S}$.

Mediante los siguientes valores del capacitor, $100\,\mu\text{F}$, $25\,\mu\text{F}$, y $6{,}25\,\mu\text{F}$ se consigue que el circuito resuene respectivamente a las tres pulsaciones indicadas tres párrafos arriba. Por repetirse el ***tono*** de la frecuencia de transmisión también se dice que el circuito está en ***sintonía*** o ***sintonizado***.

Todo lo dicho se muestra la Figura 2-28

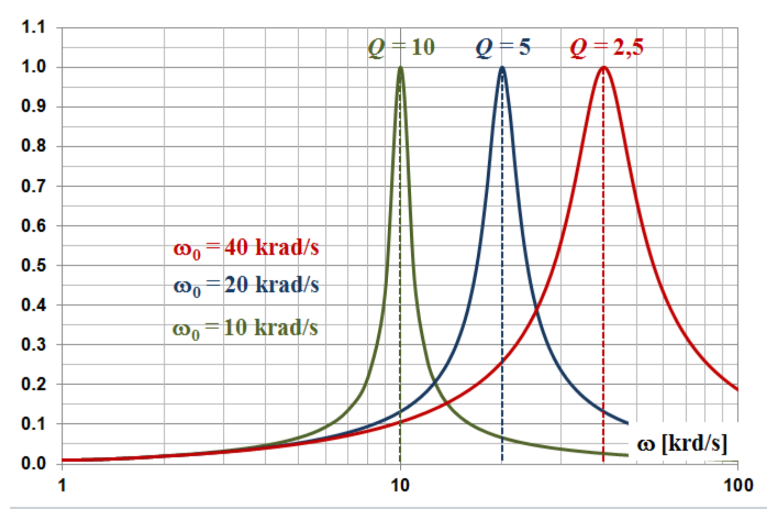


Figura 2-28: Curvas de resonancia del circuito de la Figura 2-27

Sintonizado el circuito en una de las pulsaciones de transmisión determina que la señal recibida de dicha pulsación, transformada en una fuente de corriente equivalente, tiene máxima respuesta de tensión en el circuito.

Tal es el caso, por ejemplo para $\omega_0 = 20\,\text{krad/s}$ (gráficos en azul en la Figura 2-28) con la línea de puntos marcada en la respuesta. Para las dos señales restantes, $10\,\text{krad/s}$ (verde) y $40\,\text{krad/s}$ (roja), la acción de filtro de dicha curva de resonancia azul determina respuestas bien más bajas.

La observación de lo recién explicado para las tres posibles *sintonías* da las respuestas resumidas en la Tabla 2-5, para el Q del circuito en cada una de esas *sintonías*.

Tabla 2-5: Valores de respuesta en las tres pulsaciones sintonizadas

ω_0	10 krad/s			20 krad/s			40 krad/s		
Q	10			5			2,5		
ω_0	10 krad/s	20 krad/s	40 krad/s	10 krad/s	20 krad/s	40 krad/s	10 krad/s	20 krad/s	40 krad/s
$\underline{v}_{CL} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{U}_0}$	1	0,13	0,11	0,07	1	0,26	0,03	0,13	1

El caso más notable de las respuestas de la última fila de la Tabla 2-5, sería el $26\,\%$ de señal de $20\,\mathrm{krad/s}$ que aparece junto al $100\,\%$ de la de $40\,\mathrm{krad/s}$ cuando el circuito está sintonizado a esta última pulsación (habría también $11\,\%$ de la de $10\,\mathrm{krad/s}$, pero en términos de potencia sería del orden de $1{,}2\,\%$ respecto de $6{,}7\,\%$ para la otra pulsación).

Otro aspecto interesante que surge del ejemplo de aplicación presentado es que con el aumento de ω_0 disminuye Q y consecuentemente aumenta AB, como se observa en la Figura 2-28.

Para explicar este resultado, y el correspondiente al del circuito serie, se propone al lector verificar las siguientes expresiones para el ancho de banda solo función de los elementos pasivos de cada circuito.

Circuito serie	Circuito paralelo	
$AB_s = R/L = 1/\tau_{LR}$	$AB_p = G/C = 1/\tau_{CG}$	Ec. 2-33

Dado que presentó el ejemplo con la disminución de C para conseguir mayor ω_0, de la segunda expresión de la Ec. 2-33 se explica el aumento de AB observado.

Dada la mayor facilidad para conseguir capacitancias diferentes, el circuito resonante paralelo es el más usado para seleccionar señales de distinta frecuencia.

2.6 Referencias bibliográficas

[1] Circuitos Eléctricos - Parte I. M. Deorsola, P. Morcelle. Libros de Cátedra. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata.

CAPÍTULO 3
Circuitos trifásicos. Resolución de circuitos. Componentes simétricas. Potencia trifásica

La generación, transmisión, distribución y consumo de grandes cantidades de energía eléctrica se logran mediante el uso de *circuitos trifásicos*.

Un generador de tensión alterna diseñado para desarrollar una tensión senoidal única se conoce como *generador monofásico*. Es posible construir generadores que incluyan en un mismo bloque constructivo varios generadores monofásicos (*generador polifásico*), el cual puede desarrollar más de una tensión senoidal con determinadas características de fase y amplitud, manteniendo la frecuencia. En particular, interesan los denominados *generadores trifásicos*, los cuales están conformados por tres fuentes alternas senoidales de la misma amplitud y cuyas fases difieren $\frac{2}{3}\pi\,\mathrm{rad}$ (ó 120º) entre sí. La aplicación de este tipo de generadores da origen a lo que se conoce como circuitos trifásicos, conformando *sistemas trifásicos*.

El análisis detallado de los sistemas trifásicos constituye un área de estudio en sí misma, por lo cual no puede esperarse un estudio completo en un solo capítulo.

Afortunadamente, para los ingenieros que no se especializan en sistemas de potencia, basta el conocimiento del comportamiento en estado permanente senoidal de *circuitos trifásicos perfectos* (*equilibrados* y *simétricos*). Existen un par de razones para que estas condiciones de simetría y equilibrio sean deseables. En primer lugar, un sistema trifásico real que está funcionando en condiciones normales está tan próximo a su condición de funcionamiento equilibrado y simétrico que se justifica plantear las soluciones de un sistema perfecto. Por otra parte, si el funcionamiento del circuito no cumple las condiciones de simetría y equilibrio, el problema puede resolverse mediante una técnica conocida como *método de las componentes simétricas*, el cual se basa en un conocimiento pleno del funcionamiento simétrico y equilibrado.

A lo largo del presente capítulo de definen estos conceptos de equilibrio y simetría de sistemas trifásicos. Asimismo se presentan circuitos trifásicos típicos, se efectúa una introducción al análisis de este tipo de circuitos y se muestran diversas alternativas básicas que es posible encontrar en situaciones reales.

Además, se efectúa una introducción al método de la componentes simétricas para el análisis de circuitos trifásicos desequilibrados y/o asimétricos.

Finalmente se realiza el análisis de la potencia y se introduce el estudio y los fundamentos de la medición de la misma en este tipo de sistemas.

3.1 Sistemas trifásicos. Introducción

El análisis del estado permanente en circuitos de corriente alterna basa su importancia en la aplicación en sistemas de potencia. Una de las principales razones radica en que resulta económicamente factible la transmisión de grandes cantidades de energía a grandes distancias sólo si las tensiones son muy altas, lo cual resulta relativamente fácil y económico mediante el uso de transformadores. De esta forma, la tensión alterna se aumenta para la transmisión y se reduce para la distribución de energía eléctrica.

Casi toda la energía eléctrica se produce en fuentes trifásicas. Esto tiene varias justificaciones sobradamente fundadas, tanto desde el punto de vista técnico como económico. Se puede demostrar (ver capítulo 1) que en un circuito monofásico, la potencia instantánea es pulsante, aun cuando la corriente y la tensión estén en fase. Se puede hacer una analogía con un motor de combustión de varios cilindros, en el cual a mayor cantidad de cilindros, su funcionamiento es más estable, de manera que habrá menos vibración y como consecuencia adicional, habrá también menos desgaste de las piezas móviles. Por otra parte, también se puede demostrar que la cantidad de material utilizado en los conductores y componentes asociados al sistema trifásico son considerablemente menores que los necesarios para un sistema monofásico de la misma potencia, con la consiguiente ventaja económica.

Se iniciará el estudio de los sistemas trifásicos introduciendo las *fuentes trifásicas* y las *cargas trifásicas*. A continuación se estudiarán las posibles conexiones entre las fuentes y las cargas, dando lugar a los sistemas trifásicos *tetrafilares* y *trifilares*, con fuentes y cargas conectadas en *estrella* y en *triángulo*, *equilibrados* y *desequilibrados*.

Luego se presentará una introducción al estudio de sistemas trifásicos *desequilibrados y asimétricos* mediante la utilización del *método de las componentes simétricas*.

Finalmente se analizará la potencia en sistemas trifásicos, con una breve introducción a la medición utilizando wattímetros.

3.2 Fuentes trifásicas

Un estudio detallado de fuentes trifásicas debería considerar que las mismas correspondan a fuentes de tensión reales, es decir, con impedancia interna conectada en serie. A los efectos de la simplificación del estudio y para no perder la atención en cuestiones conceptuales, se trabajará con fuentes trifásicas de tensión ideales. Una vez fijados los conceptos, quedará como ejercicio para el lector incluir el efecto de dichas impedancias internas.

3.2.1 Fuente trifásica perfecta

Considérense tres fuentes de tensión senoidal de la misma amplitud, cada una desfasada de las otras un ángulo de $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$ (ó 120º), las cuales se definen mediante las siguientes expresiones matemáticas:

$$u_R(t) = U_{máx} \cos(\omega t) \quad \text{Ec. 3-1}$$

$$u_S(t) = U_{máx} \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad \text{Ec. 3-2}$$

$$u_T(t) = U_{máx} \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \quad \text{Ec. 3-3}$$

La identificación de las tres funciones anteriores (subíndices R, S y T) corresponde a una nomenclatura muy utilizada y que representa lo que suele denominarse ***fases*** del sistema trifásico. Por lo tanto, las funciones anteriores representan las ***tensiones de fase*** de la fuente trifásica considerada.

La Figura 3-1 muestra las funciones de las Ec. 3-1, Ec. 3-2 y Ec. 3-3 representadas por sus correspondientes gráficas en función del tiempo y para $U_{máx} = 311\,\text{V}$ (valor eficaz $220\,\text{V}$) correspondiente a la tensión de distribución domiciliaria.

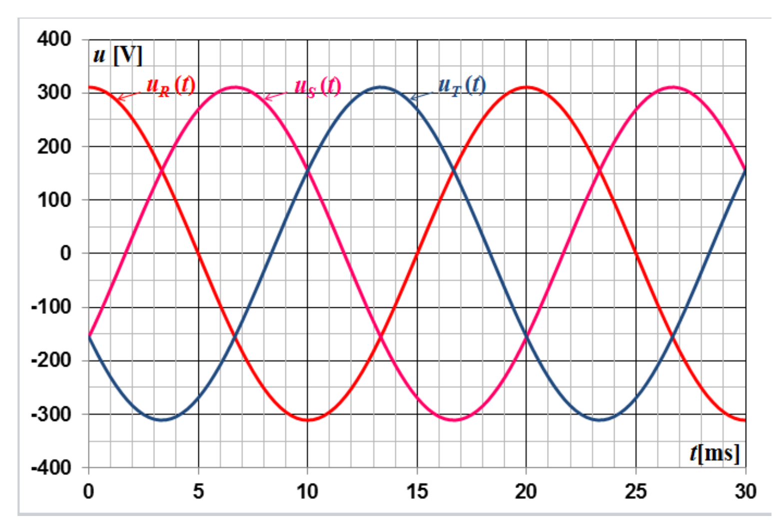


Figura 3-1 Formas de onda de las tensiones de fase de un sistema trifásico perfecto

La fuente trifásica definida según las Ec. 3-1, Ec. 3-2 y Ec. 3-3 suele denominarse *perfecta*, dado que es *equilibrada* y *simétrica*. La condición de equilibrio surge de que, si se realiza la *suma instantánea* de las tensiones monofásicas de las tres fuentes, el resultado es *cero*. Esta condición se puede verificar observando las señales de la Figura 3-1 y sumando algebraicamente las tres tensiones para un instante determinado, también utilizando la notación fasorial o mediante los números complejos que representan dichas tensiones, a saber:

$$\underline{U}_R = U_{máx} e^{j\pi/2} \quad \text{Ec. 3-4}$$

$$\underline{U}_S = U_{máx} e^{-j\pi/6} \quad \text{Ec. 3-5}$$

$$\underline{U}_T = U_{máx} e^{j7\pi/6} \quad \text{Ec. 3-6}$$

cuya representación gráfica se muestra en la Figura 3-2.

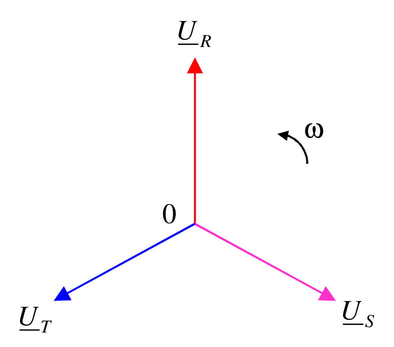


Figura 3-2 Representación fasorial de las tensiones de fase de un sistema trifásico perfecto

En la misma Figura 3-2 se puede verificar que la calificación de *simétrico* del sistema surge observando que la separación angular entre cada fasor respecto de los otros dos es la misma.

Como observación final se destaca que es posible caracterizar una fuente trifásica perfecta conociendo solamente el módulo de la tensión de una sus fuentes monofásicas componentes. En efecto, la afirmación anterior puede verificarse observando el diagrama fasorial de la Figura 3-2, dado que como se dijo, los módulos de las tres tensiones deben ser iguales y los ángulos entre ellas deben valer $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$. La caracterización completa se obtiene conociendo el tipo de conexión de las fuentes monofásicas, lo cual se explica en la sección 3.2.3.

3.2.2 Secuencia

La *secuencia* de un sistema trifásico indica el orden de sucesión de las fases.

Sea por caso el diagrama fasorial de la Figura 3-2. En el mismo se tiene una *terna* conformada por los fasores de las tres tensiones de fase de una fuente trifásica girando en sentido antihorario. Por lo tanto, un observador situado a la derecha de dicho diagrama verá pasar dichos fasores en el orden $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, y $\underline{U}_T$ (o RST) indefinidamente. A esta sucesión se la denomina por convención *secuencia directa, positiva ó 1*.

Si en cambio, el observador viese pasar los fasores en el orden $\underline{U}_R$, $\underline{U}_T$, y $\underline{U}_S$ (o RTS), esta sucesión se denomina *secuencia inversa, negativa ó 2*.

Este cambio en la secuencia podría obtenerse intercambiando dos cualquiera de los fasores de la terna o invirtiendo el sentido de giro del diagrama fasorial completo (sentido horario).

Esta definición de *secuencia* tiene implicancias muy importantes dado que, por un lado brinda la posibilidad de invertir el sentido de giro del eje de motores trifásicos, y por otro lado permite servir de base en el desarrollo de teorías como la que se presenta en la sección 3.9.

3.2.3 Conexiones de la fuente trifásica

Existen dos posibles conexiones de las tres fuentes que conforman un sistema trifásico: *conexión estrella* y *conexión triángulo*. Cierta bibliografía también utiliza las denominaciones Y y Δ, respectivamente. Las Figura 3-3 y Figura 3-4 ilustran las dos posibilidades mencionadas, cuyas denominaciones resultan obvias a partir de la observación de los correspondientes circuitos.



Figura 3-3 Fuente trifásica en conexión estrella **Figura 3-4** Fuente trifásica en conexión triángulo

Conexión estrella o Y

En la Figura 3-3 se observan las tres fuentes monofásicas conectadas en estrella. En esta conexión las fuentes se unen por su borne de polaridad negativa instantánea a un punto común. Dicho punto común conforma un nodo que usualmente se identifica con un 0, dado que se le asigna tensión *cero*. Es decir que entre R y 0 se tendrá la tensión $\underline{U}_R$, entre S y 0 se tendrá la tensión $\underline{U}_S$, y entre T y 0 se tendrá la tensión $\underline{U}_T$, tal cual fueron definidas en las Ec. 3-4, Ec. 3-5 y Ec. 3-6.

Asimismo, en el circuito de la Figura 3-3 se puede observar que, mediante la aplicación de la ley de Kirchhoff de tensiones es posible determinar las tensiones entre los extremos de la estrella, es decir

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S \quad \text{Ec. 3-7}$$

$$\underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T \quad \text{Ec. 3-8}$$

$$\underline{U}_{TR} = \underline{U}_T - \underline{U}_R \quad \text{Ec. 3-9}$$

Las tensiones $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, y $\underline{U}_T$ son las *tensiones de fase*, tal como se mencionó más arriba; mientras que $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$, y $\underline{U}_{TR}$ suelen denominarse *tensiones de línea* para diferenciarlas de las anteriores, aunque más adelante se realizará una justificación de dicha denominación.

La Figura 3-5 muestra las formas de onda de las tensiones de línea y de las tensiones de fase de una fuente trifásica perfecta en conexión estrella.

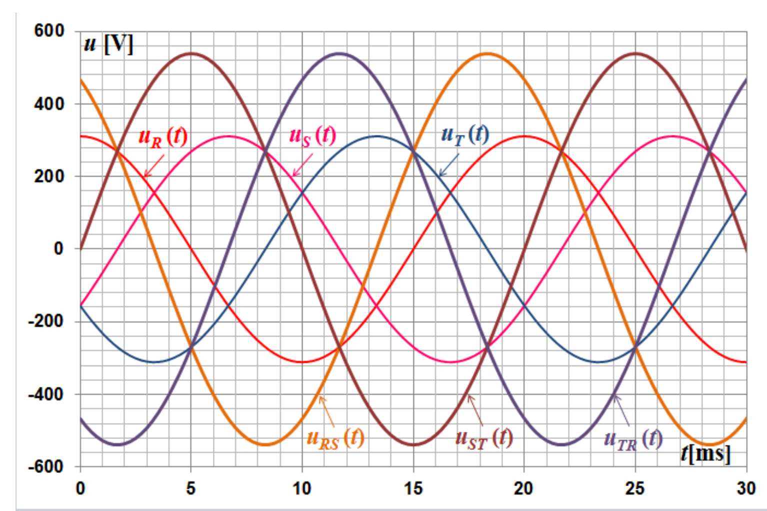


Figura 3-5 Formas de onda de las tensiones de fase y de línea de una fuente trifásica perfecta conectada en estrella

La gráfica de la Figura 3-5 pone de manifiesto una vez más la conveniencia de la utilización de fasores o de números complejos para representar señales en circuitos con tensiones y corrientes senoidales.

Conexión triángulo o Δ

En la Figura 3-6, se observa que las fuentes conectan su borne positivo con el negativo de otra de manera de formar un lazo cerrado. Dado que los vértices del triángulo se identifican con las mismas letras que los extremos de la estrella de la Figura 3-3, se suele establecer la denominación de las fuentes respectivas a partir de la diferencia entre las tensiones de dichos vértices, obteniéndose las expresiones de la Ec. 3-7, Ec. 3-8 y Ec. 3.9.

Se puede demostrar que en una fuente perfecta conectada en triángulo se cumplen las mismas condiciones que las indicadas para una fuente en estrella respecto de los módulos y los desfasajes. Esta demostración se deja como ejercicio para el lector.

3.2.4 Equivalencia entre fuentes estrella y triángulo

De la observación de las Figura 3-3 y Figura 3-4 se puede verificar la equivalencia de las fuentes trifásicas conectadas en Y y en Δ "vistas desde" los tres bornes accesibles R, S y T. Es decir que es posible encontrar valores de las tensiones monofásicas de las fuentes conectadas en estrella, $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, y $\underline{U}_T$, para que las tensiones $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$, y $\underline{U}_{TR}$ sean las mismas en ambas fuentes.

En efecto, la verificación se puede realizar mediante la Ec. 3-7, Ec. 3-8 y Ec. 3-9 u observando los diagramas fasoriales de las Figura 3-6 y Figura 3-7; en la primera se muestra el diagrama fasorial que incluye las tensiones de fase y de línea de la fuente trifásica en estrella,

mientras que la Figura 3-7 muestra el diagrama fasorial de las tensiones de la fuente trifásica conectada en triángulo.

Comparando los dos diagramas se verifica que se puede establecer una equivalencia entre ambas fuentes trifásicas si sus tensiones de línea correspondientes son iguales.

Es posible advertir una consecuencia de las dos formas de conexión. Mientras que la fuente en triángulo cuenta con tres tensiones (de línea); la fuente en estrella tiene dos juegos de tensiones, de línea y de fase. Esta característica podría constituir una ventaja en ciertas aplicaciones, como se verá más adelante.

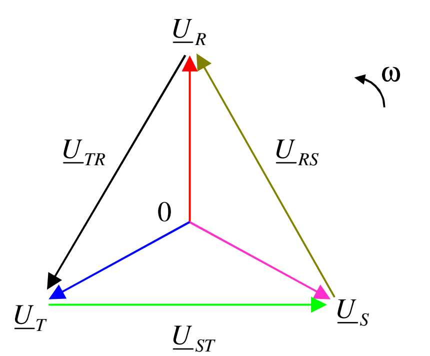


Figura 3-6 Diagrama fasorial de tensiones de una fuente trifásica perfecta conectada en estrella

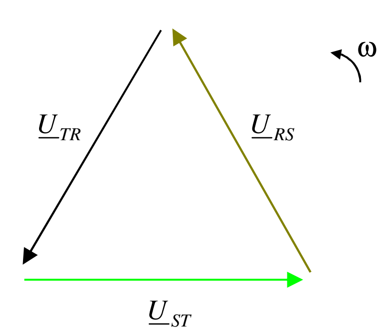


Figura 3-7 Diagrama fasorial de tensiones de una fuente trifásica perfecta conectada en triángulo

Como consecuencia de esta equivalencia es posible establecer una relación práctica que permite relacionar los módulos de las tensiones de línea con los módulos de las tensiones de fase de una fuente trifásica perfecta conectada en estrella. Dicha relación se presenta en la Ec. 3-10.

$$\frac{U_{línea}}{U_{fase}} = \sqrt{3} \qquad \text{Ec. 3-10}$$

Se invita al lector a demostrar la relación de la Ec. 3-10. Para obtener este resultado se sugiere realizar consideraciones geométricas observando la Figura 3-6, teniendo en cuenta que en una fuente trifásica perfecta el sistema de tensiones de línea conforma un triángulo equilátero, mientras que cada tensión del sistema de tensiones de fase corresponde a las bisectrices de los ángulos de dicho triángulo. También se puede desarrollar el cálculo de la Ec. 3-7, Ec. 3-8 y Ec. 3-9, para obtener el módulo de las $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$, y $\underline{U}_{TR}$ en función de las $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, y $\underline{U}_T$ o viceversa.

3.2.5 Fuentes trifásicas desequilibradas y asimétricas

Como ya se mencionó, los sistemas trifásicos reales no son "perfectos", pero en funcionamiento normal, permanente y estable, es posible considerarlos en dicha condición.

Hay situaciones en las cuales la condición de sistema perfecto se pierde, y esto ocurre en circunstancias particulares que habitualmente se denominan *condiciones de falla de sistemas trifásicos*. En estos casos, la fuente trifásica puede desequilibrarse notoriamente, perdiéndose eventualmente la simetría. En dichas situaciones los módulos de las tensiones pueden ser muy diferentes entre sí, así como los ángulos entre ellas. Las Figura 3-8 y Figura 3-9 muestran un par de ejemplos típicos.

En esta situación las ventajas del análisis de sistemas perfectos se pierden y es preciso recurrir al análisis clásico mediante las leyes de Kirchhoff, el cual podría resultar muy tedioso según la complejidad del circuito.

Otro camino, que es el más utilizado en la práctica, es utilizar el *método de las componentes simétricas* ya mencionado, el cual se presenta en la sección 3.9.

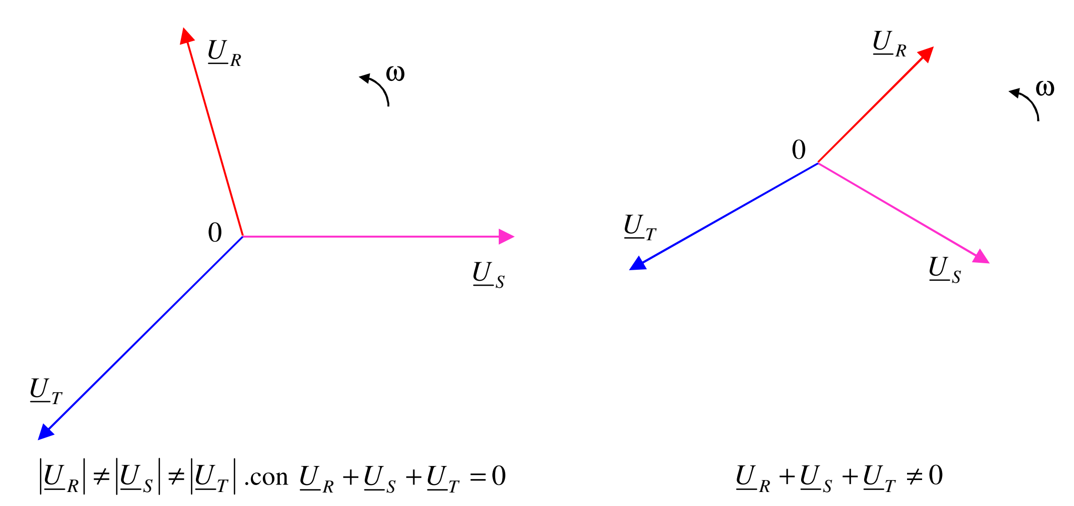


Figura 3-8 Fuente trifásica equilibrada asimétrica

Figura 3-9 Fuente trifásica desequilibrada y asimétrica

3.3 Cargas trifásicas

Así como las fuentes monofásicas se agrupan en forma de Y o Δ para obtener fuentes trifásicas, lo mismo ocurre con las cargas. Las Figura 3-10 y Figura 3-11 muestran las dos posibles conexiones de cargas monofásicas para formar cargas trifásicas, estrella y triángulo respectivamente, siendo posible que en un mismo sistema trifásico se conecten cargas en estrella y en triángulo en forma simultánea.



Figura 3-10 Carga trifásica conectada en estrella

Figura 3-11 Carga trifásica conectada en triángulo

Puede observarse en las figuras anteriores la similitud con las correspondientes fuentes, es decir que se puede hablar de *tensiones de fase* de la carga trifásica en el caso de las tensiones $\underline{U}_{R0'}$, $\underline{U}_{S0'}$, y $\underline{U}_{T0'}$, y *tensiones de línea* en el caso de $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$, y $\underline{U}_{TR}$.

De manera similar, las cargas trifásicas se pueden clasificar en *cargas equilibradas* y *desequilibradas*, cuyas condiciones se presentan en la Tabla 3-1.

Tabla 3-1 Condiciones de las cargas equilibradas y desequilibradas

Cargas equilibradas:	Y	$\lvert\underline{Z}_R\rvert = \lvert\underline{Z}_S\rvert = \lvert\underline{Z}_T\rvert$	y	$\phi_R = \phi_S = \phi_T$
	Δ	$\lvert\underline{Z}_{RS}\rvert = \lvert\underline{Z}_{ST}\rvert = \lvert\underline{Z}_{TR}\rvert$	y	$\phi_{RS} = \phi_{ST} = \phi_{TR}$
Cargas desequilibradas:	Y	$\lvert\underline{Z}_R\rvert \neq \lvert\underline{Z}_S\rvert \neq \lvert\underline{Z}_T\rvert$	y/o	$\phi_R \neq \phi_S \neq \phi_T$
	Δ	$\lvert\underline{Z}_{RS}\rvert \neq \lvert\underline{Z}_{ST}\rvert \neq \lvert\underline{Z}_{TR}\rvert$	y/o	$\phi_{RS} \neq \phi_{ST} \neq \phi_{TR}$

El análisis del circuito puede realizarse sin inconvenientes manteniendo las configuraciones originales de las cargas, pero también es posible convertir una carga Y en una Δ equivalente y viceversa, según convenga; aunque debe aclararse que esta conversión no siempre es conveniente y el lector deberá tener cuidado cuando decida resolver los circuitos de esta forma.

La conversión $Y \to \Delta$ y $\Delta \to Y$ suele denominarse *transformación de Kennelly*[22] la cual se resume en los siguientes dos juegos de fórmulas; las tres primeras se utilizan para pasar de la conexión Δ a Y, y las tres siguientes para la inversa.

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{Z}_{RS}.\underline{Z}_{RT}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}} \qquad \text{Ec. 3-11}$$

$$\underline{Z}_S = \frac{\underline{Z}_{TS}.\underline{Z}_{RS}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}} \qquad \text{Ec. 3-12}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{Z}_{RT}.\underline{Z}_{ST}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}} \qquad \text{Ec. 3-13}$$

$$\underline{Z}_{RS} = \frac{\underline{Z}_R.\underline{Z}_S + \underline{Z}_S.\underline{Z}_T + \underline{Z}_T.\underline{Z}_R}{\underline{Z}_T} \qquad \text{Ec. 3-14}$$

$$\underline{Z}_{ST} = \frac{\underline{Z}_R.\underline{Z}_S + \underline{Z}_S.\underline{Z}_T + \underline{Z}_T.\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R} \qquad \text{Ec. 3-15}$$

$$\underline{Z}_{TR} = \frac{\underline{Z}_R.\underline{Z}_S + \underline{Z}_S.\underline{Z}_T + \underline{Z}_T.\underline{Z}_R}{\underline{Z}_S} \qquad \text{Ec. 3-16}$$

[22] ***A.E. Kennelly***, *"Equivalence of triangles and three-pointed stars in conducting networks", Electrical World and Engineer, vol. 34, pp. 413–414, 1899.*

El lector debería poder demostrar estos resultados planteando la impedancia "vista" entre cada par de bornes de la carga considerada. Otra demostración posible se presenta en el Apéndice A.

3.4 Conexión de fuentes y cargas trifásicas

Hay diversas combinaciones de conexión entre fuentes y cargas trifásicas. En esta sección se van a presentar las combinaciones más comunes y algunos casos especiales habituales.

3.4.1 Fuente en estrella y carga en estrella

Las Figura 3-12 y Figura 3-13 muestran conexiones trifásicas de fuente en estrella y carga en estrella. Se observa la posibilidad de vincular fuente y carga mediante tres o cuatro conductores; respectivamente. En el primer caso se habla de circuitos *trifilares* y en el segundo, de *tetrafilares*.

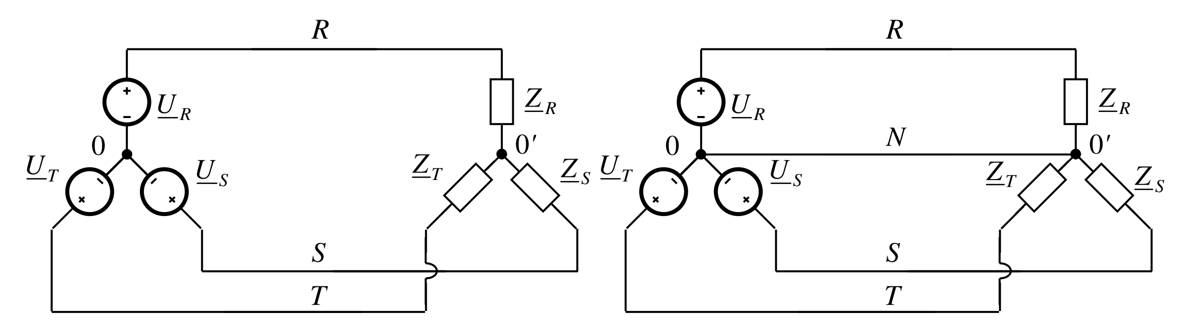


Figura 3-12 Conexión trifilar de fuente en estrella y carga en estrella

Figura 3-13 Conexión tetrafilar de fuente en estrella y carga en estrella

Como se observa en la Figura 3-13, el circuito tetrafilar incluye un conductor que vincula los centros de estrella de la fuente y de la carga, habitualmente denominado *conductor neutro*.

3.4.2 Fuente en estrella y carga en triángulo

La Figura 3-14 muestra la conexión trifásica de fuente en estrella y carga en triángulo. Se observa como única posibilidad la conexión trifilar entre fuente y carga.

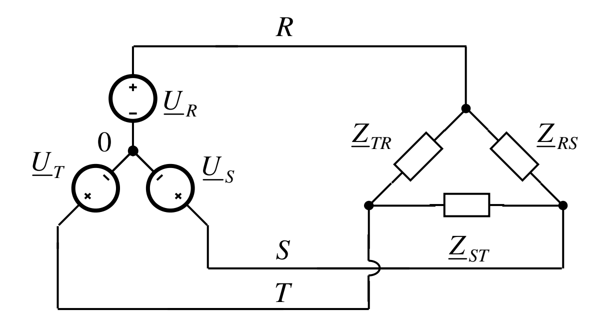


Figura 3-14 Conexión de fuente en estrella y carga en triángulo

3.4.3 Fuente en triángulo y carga en estrella

La Figura 3-15 muestra la conexión trifásica de fuente triángulo en y carga en estrella. Al igual que en caso anterior, se tiene como única posibilidad la conexión trifilar entre fuente y carga.

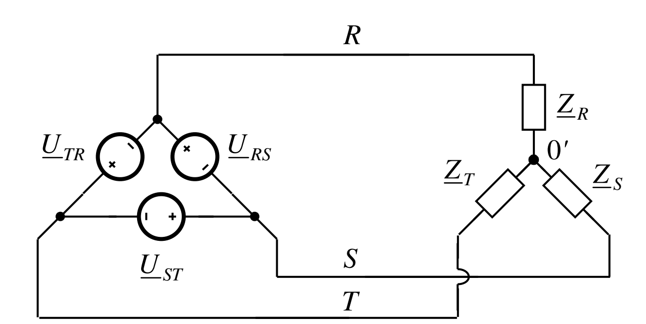


Figura 3-15 Conexión de fuente en triángulo y carga en estrella

3.4.4 Fuente en triángulo y carga en triángulo

La Figura 3-16 muestra la conexión trifásica de fuente en triángulo y carga en triángulo, siendo la única posibilidad la conexión trifilar entre fuente y carga.

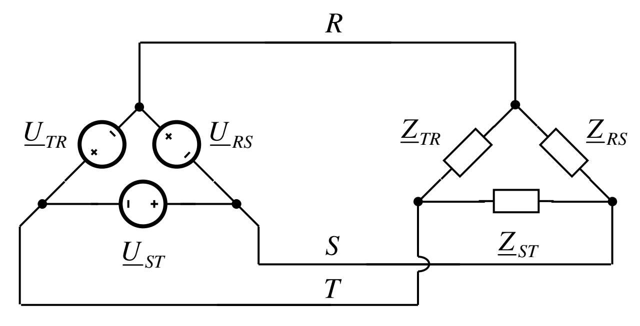


Figura 3-16 Conexión de fuente en triángulo y carga en triángulo

3.5 Análisis de circuitos trifásicos

Se estudia la configuración con generador y carga conectados en estrella con neutro por ser la conexión más rica en alternativas de análisis y por ser uno de los más comúnmente encontrados en sistemas de baja tensión.

Se supone que las fuentes trifásicas son perfectas, mientras que las cargas pueden ser equilibradas y/o desequilibradas.

Se considera el circuito de la Figura 3-17 en la cual se muestra un circuito con fuente en estrella y carga en estrella con conductor neutro.

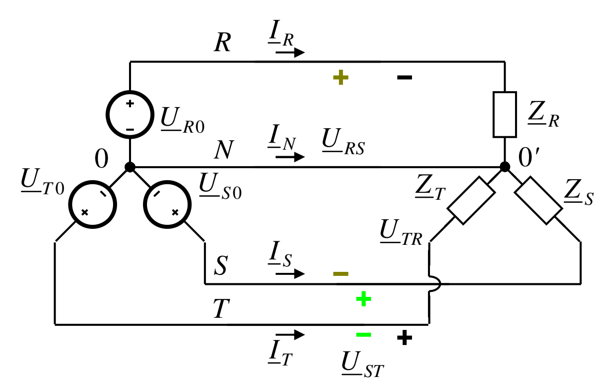


Figura 3-17 Carga en estrella alimentada por fuente en estrella con neutro

Para el primer caso de análisis se supone que la carga equilibrada y la impedancia del neutro y de los demás conductores valen cero.

Dado que la impedancia del neutro es nula, se puede observar de la Figura 3-17 que la tensión de las fuentes monofásicas que representan las tensiones de fase, se encuentran conectadas en paralelo con las respectivas cargas.

Por lo tanto, al ser la fuente perfecta y la carga equilibrada, las corrientes resultantes en cada impedancia de fase tienen el mismo módulo y están separadas $2/3\pi\ \mathrm{rad}$. Esto significa que si se aplica la primera ley de Kirchhoff en cualquiera de los centros de estrella se cumplirá la Ec. 3-17, y la corriente del neutro valdrá cero.

$$-\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T \qquad \text{Ec. 3-17}$$

Además $\underline{U}_{0'0} = 0$.

El diagrama fasorial de esta situación se muestra en la Figura 3-18, suponiendo que la carga tiene características inductivas.

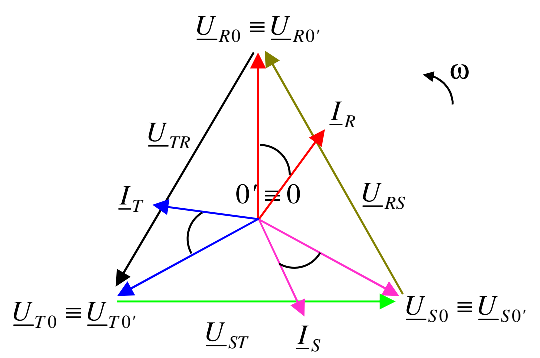


Figura 3-18 Diagrama fasorial del circuito de la Figura 3-17 con carga equilibrada

Se puede observar en el diagrama de la Figura 3-18 que las tensiones de las cargas coinciden con las tensiones de las respectivas tensiones de fase de la fuente. Además, por ser la carga equilibrada, las corrientes de cada impedancia de fase tienen el mismo módulo y están desfasadas $^2\!/_3\,\pi$ rad ; lo cual puede ser verificado por el lector aplicando la ley de Ohm en cada una de dichas impedancias. Claramente se ve que efectivamente la corriente del neutro $\underline{I}_N$ vale cero, ya que el diagrama fasorial de las corrientes es equilibrado, y la suma gráfica de $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$ también resulta cero.

Si en estas condiciones se desconectara el conductor neutro, se puede demostrar que $\underline{U}_{0'0}$ no sufre variaciones y sigue valiendo cero. Esta situación se mantendría incluso si la impedancia del neutro tomara valores distintos de cero. La verificación de esta situación puede ser realizada por el lector, teniendo en cuenta lo mencionado en párrafos anteriores respecto del equilibrio de las corrientes.

Si ahora en el circuito de la Figura 3-17 se reemplaza la carga estrella equilibrada por una nueva carga estrella pero desequilibrada, y mientras el conductor neutro se encuentre conectado, las tensiones en las impedancias tomarán los correspondientes valores de las fuentes de fase, siempre y cuando el neutro mantenga la condición de impedancia cero, dado que las cargas se encuentran conectadas en paralelo con las correspondientes fuentes de fase. La diferencia sustancial con el caso anterior es que la Ec. 3-17 se sigue cumpliendo pero ahora resulta que $\underline{I}_N \neq 0$, por lo tanto existirá una corriente *de retorno* por el neutro hacia la fuente trifásica. El diagrama fasorial de esta nueva situación es idéntico al de la Figura 3-18 en cuanto a las tensiones, pero las corrientes resultarán desequilibradas, como muestra la Figura 3-19.

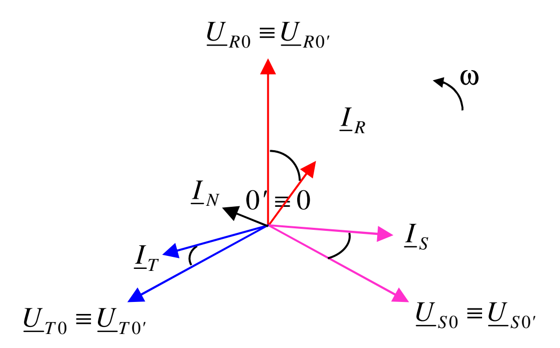


Figura 3-19 Diagrama fasorial del circuito de la Figura 3-17 con carga desequilibrada y neutro con impedancia nula.

Si en esta nueva situación de carga desequilibrada, el neutro se desconectara o su impedancia $\underline{Z}_N$ presentara un valor distinto de cero, resulta evidente que habrá una redistribución de corrientes, dado que $\underline{I}_N$ pasará a tomar un valor distinto del que tenía antes de desconectar el neutro o de producirse un cambio en su impedancia; debido a lo cual la tensión del centro de estrella de la carga muy probablemente adquiera valores diferentes de cero, es decir, ya no se podrá asegurar que $\underline{U}_{0'0} = 0$. En esta nueva situación, el diagrama fasorial podría tomar la forma que se muestra en la Figura 3-20.

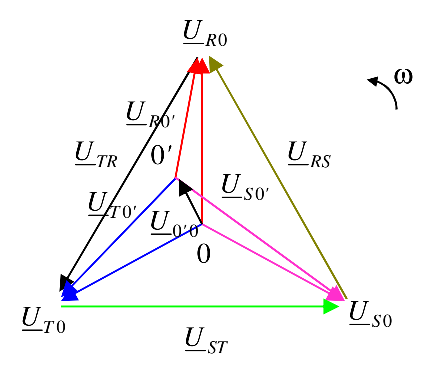


Figura 3-20 Diagrama fasorial del circuito de la Figura 3-17con carga desequilibrada y neutro con impedancia distinta de cero.

3.6 Esquemas simplificados

Es posible efectuar los análisis realizando esquemas simplificados, en los cuales no es necesario dibujar explícitamente la fuente trifásica.

Considerando el circuito de la Figura 3-21 se puede inferir que la carga está alimentada por una fuente trifásica conectada en estrella, aun cuando ésta no esté dibujada, dado que la misma se identifica por los bornes (fases R, S, T y neutro 0).

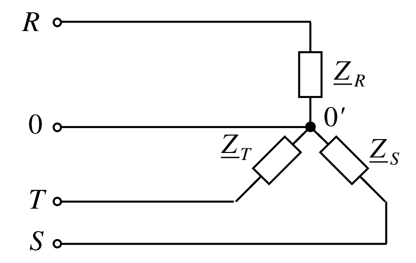


Figura 3-21 Carga alimentada por fuente en estrella

Asimismo, la Figura 3-22 muestra que la identificación puede no ser tan contundente como en el caso anterior. En efecto, en este caso la fuente podría corresponder a una conexión tanto estrella como triángulo. Si fuera el primer caso, es evidente que por alguna razón se ha omitido el conductor neutro, resultando la fuente conectada sólo a través de los conductores de línea identificados por sus fases. Pero también podría corresponder a una fuente conectada en triángulo.

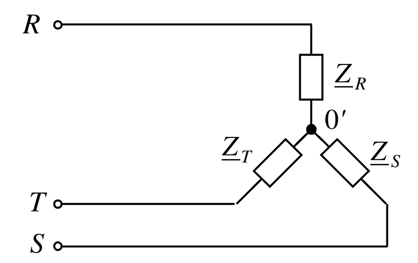


Figura 3-22 Carga alimentada por fuente en estrella o en triángulo.

La habilidad y experiencia del analista, junto con la información disponible de la fuente trifásica son la clave para interpretar adecuadamente estos esquemas de circuito; dado que, como ya se mencionó, es posible caracterizar una fuente de tensión trifásica perfecta por el módulo de una sola de sus fuentes monofásicas y por su tipo de conexión (Δ o Y).

3.7 Corrimiento del neutro

El "método de corrimiento del neutro" es una herramienta simple y ágil para el análisis de circuitos trifásicos desequilibrados, con fuente y carga en estrella.

Se basa en la aplicación de la primera ley de Kirchhoff en uno de los centros de estrella, ya sea de la fuente o de la carga; de ahí que su validez se restrinja a circuitos trifásicos en conexión estrella-estrella.

La denominación "corrimiento del neutro" deriva de la observación del diagrama fasorial completo de tensiones, en el cual se puede verificar que si la tensión de uno de los centros de estrella es distinta de la tensión del otro centro de estrella, la ubicación de los mismos en el plano complejo no coincide, existiendo un "corrimiento" del punto que repre-

senta una las tensiones respecto del otro. Esto se pone de manifiesto al observar el diagrama fasorial de la Figura 3-20.

Para el análisis se supone un circuito trifásico similar al de la Figura 3-17, pero en el cual se considera que la impedancia del neutro tiene un valor $\underline{Z}_N$, tal como muestra la Figura 3-29. También se considera que las impedancias de la carga no tienen por qué ser iguales (carga desequilibrada)

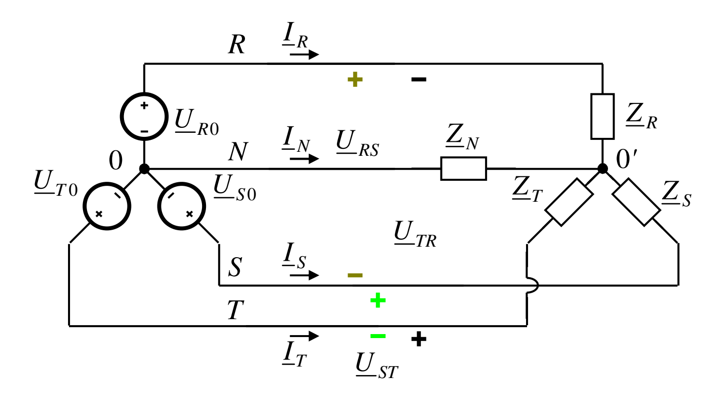


Figura 3-23 Circuito trifásico general con generador y carga en estrella y neutro de impedancia distinta de cero

Se plantea la primera ley de Kirchhoff en cualquiera de los centros de estrella (nodos), Ec. 3-18.

$$\underline{I}_N + \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \qquad \text{Ec. 3-18}$$

Cada corriente puede escribirse en términos de las relaciones Ec. 3-19, Ec. 3-20, Ec. 3-21 y Ec. 3-22 de acuerdo a la ley de Ohm.

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{R0'}}{\underline{Z}_R} \qquad \text{Ec. 3-19}$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{S0'}}{\underline{Z}_S} \qquad \text{Ec. 3-20}$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{T0'}}{\underline{Z}_T} \qquad \text{Ec. 3-21}$$

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{00'}}{\underline{Z}_N} \qquad \text{Ec. 3-22}$$

Además

$$\underline{U}_0 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{0'} \text{ o bien } \underline{U}_{00'} = -\underline{U}_{0'} \qquad \text{Ec. 3-23}$$

Luego, reemplazando las expresiones de las corrientes en la Ec. 3-18, se puede escribir la Ec. 3-24.

$$\frac{\underline{U}_{R0} - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{S0} - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{T0} - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_T} + \frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_N} = 0 \qquad \text{Ec. 3-24}$$

Finalmente resulta la Ec. 3-25.

$$\underline{U}_{0'} = \frac{\underline{U}_{R0} \cdot \underline{Y}_R + \underline{U}_{S0} \cdot \underline{Y}_S + \underline{U}_{T0} \cdot \underline{Y}_T}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_N} \qquad \text{Ec. 3-25}$$

Por lo tanto, la Ec. 3-25 proporciona el valor de la tensión entre ambos centros de estrella en función de magnitudes que son generalmente conocidas, como son las tensiones de las fuentes monofásicas que conforman la fuente trifásica y las impedancias de la carga y del neutro.

A continuación, se efectúan algunas observaciones sobre la expresión de la Ec. 3-25, que justifican algunos de los análisis conceptuales efectuados en la sección 3.5.

Si la carga es equilibrada, puede demostrarse que $\underline{U}_{0'} = 0$. En efecto, el equilibrio de cargas implica que $\underline{Y}_R = \underline{Y}_S = \underline{Y}_T = \underline{Y}$, por lo tanto, sacando factor común $\underline{Y}$ en el numerador de la Ec. 3-25 resulta

$$\underline{U}_{0'} = \frac{\left(\underline{U}_{R0} + \underline{U}_{S0} + \underline{U}_{T0}\right) \cdot \underline{Y}}{3 \cdot \underline{Y} + \underline{Y}_N} \qquad \text{Ec. 3-26}$$

y como la fuente es perfecta, el paréntesis de la Ec. 3-26 es igual a cero, resultando $\underline{U}_{0'} = 0$.

Por otra parte, si la impedancia de neutro es nula, resulta $\underline{Y}_N \to \infty$, con lo cual nuevamente resulta $\underline{U}_{0'} = 0$, independientemente de las características de la carga (equilibrada o no).

3.8 Circuito equivalente monofásico

En las condiciones de generador perfecto y carga equilibrada, conectados en estrella, pueden aprovecharse las simetrías del circuito y del diagrama fasorial de corrientes y tensiones que representan su funcionamiento para efectuar una simplificación del análisis.

En efecto, podría redibujarse el circuito de la Figura 3-17 y el fasorial de la Figura 3-18 como se muestra en la Figura 3-24 y Figura 3-25, respectivamente.

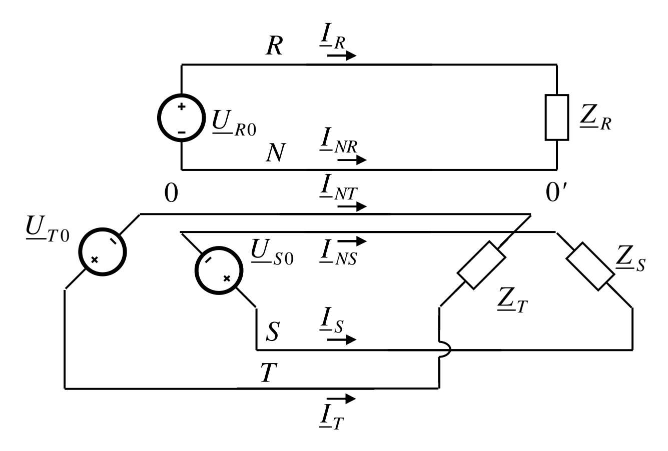


Figura 3-24 Separación del circuito trifásico en estrella equilibrado en tres equivalentes monofásicos

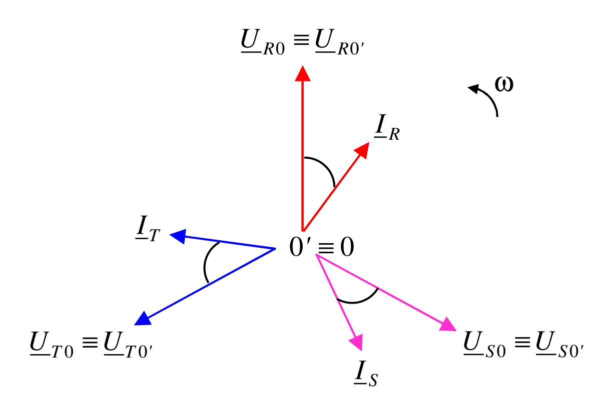


Figura 3-25 Separación del diagrama fasorial del circuito de la Figura 3-24 en tres diagramas monofásicos

Cada diagrama fasorial de la Figura 3-25 se corresponde con el circuito monofásico respectivo de la Figura 3-24.

Debe observarse que $\underline{I}_{NR} = -\underline{I}_R$, $\underline{I}_{NS} = -\underline{I}_S$ e $\underline{I}_{NT} = -\underline{I}_T$. De esta forma, la solución completa del circuito trifásico surge de la composición de los tres circuitos monofásicos, de manera que $-\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0$.

A partir de lo explicado es posible analizar un circuito trifásico conectado en estrella, con fuente perfecta y carga equilibrada utilizando su *equivalente monofásico*. En estas condiciones, este análisis también resulta válido si no existiese conductor neutro.

Queda como ejercicio para el lector demostrar que es posible analizar un circuito trifásico conectado en triángulo mediante su equivalente monofásico, si la fuente es perfecta y la carga equilibrada.

3.9 Componentes simétricas

Como se mencionó oportunamente, si bien el análisis de circuitos trifásicos expuesto en este capítulo podría haberse realizado utilizando cualquiera de los métodos de análisis de circuitos conocidos, incluyendo por supuesto las leyes de Kirchhoff; realizar el estudio con las herramientas presentadas permite aprovechar las características de simetría que presenta este tipo de circuitos.

En efecto, si la fuente es perfecta y la carga equilibrada, las ventajas resultan evidentes. Aún si la carga es desequilibrada, mientras la fuente sea perfecta, dichas ventajas subsisten.

Existe una forma de análisis sistemático de circuitos trifásicos que se encuentren alimentados por una fuente trifásica que no sea perfecta; es decir, que los módulos de sus tensiones sean diferentes, al igual que sus fases. Esta forma de resolución apunta a convertir la fuente desequilibrada y/o asimétrica en una combinación de fuentes simétricas y/o equilibradas.

Esta metodología simplifica el análisis y además permite efectuar la resolución mediante métodos numéricos, como se verá.

Una aplicación inmediata y bien difundida de esta metodología es el estudio de circuitos trifásicos afectados por fallas (cortocircuitos), tal como se indica en alguna bibliografía específica mencionada en la sección 3.10.

El estudio que se propone de aquí en adelante sólo presenta los fundamentos teóricos relacionados con la metodología de análisis; las aplicaciones mencionadas en el párrafo anterior quedan fuera de los alcances de este texto.

3.9.1 Método de las componentes simétricas - Teorema de Fortescue

El método de las componentes simétricas es también conocido por diversa bibliografía como *Teorema de Fortescue*, en honor a quien lo propuso por primera vez, Charles Legeyt Fortescue. En su publicación de 1918, Fortescue desarrolló el método para un sistema *n*-fásico[23].

En líneas generales, una definición concisa del presente método (Teorema de Fortescue) puede expresarse de la siguiente manera:

Cualquier sistema trifásico asimétrico y desequilibrado puede descomponerse en tres ternas simétricas, dos de ellas equilibradas de secuencia directa e inversa respectivamente, y una tercera homopolar.

Para tener una visión adecuada de este enunciado, se considera conveniente comenzar planteando el caso inverso; es decir, suponer tres ternas o sistemas de fasores trifásicos, el primero *equilibrado y simétrico de secuencia directa*, el segundo también *equilibrado y simétrico pero de secuencia inversa*, y un tercero consistente en *tres fasores con el mismo módulo e igual fase*, denominado *homopolar* (se puede considerar que el sistema homopolar presenta cierta simetría de fase, dado que los ángulos de los tres fasores son los mismos). La suma de estos tres sistemas resulta en una terna trifásica desequilibrada y asimétrica. Un ejemplo de los mismos se muestra en la Figura 3-26.

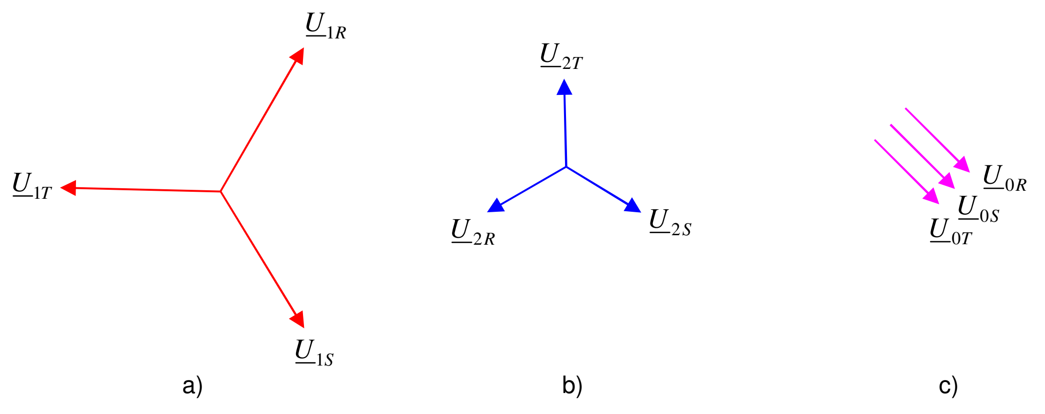


Figura 3-26 Sistemas componentes de Fortescue.

[23] ***C. L. Fortescue**, "Method of symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks", 34th Annual Convention of the American Institute of Electrical Engineers, Atlantic City, N. J., June 28, 1918.*

a) terna de secuencia directa, b) terna de secuencia inversa, c) terna homopolar

La terna de secuencia homopolar suele también denominarse de secuencia 0 (cero); la de secuencia directa, 1 ó *positiva*; y la de secuencia inversa, 2 ó *negativa*. De ahí surge la nomenclatura utilizada para identificar los fasores.

En la Figura 3-27 se observa el resultado de la suma de los tres sistemas de la Figura 3-26.

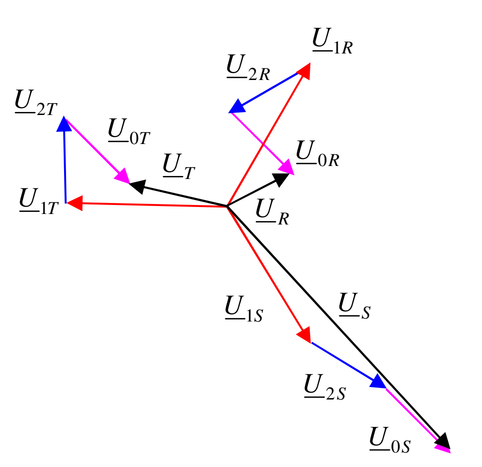


Figura 3-27 Sistema resultante de la suma de los tres sistemas de la Figura 3-26.

Se puede verificar fácilmente que la suma resultante de la Figura 3-27 corresponde a un sistema trifásico desequilibrado y asimétrico.

Dado que este sistema se obtuvo a partir de la suma de los fasores correspondientes a cada una de las ternas simétricas, es de esperar que la inversa sea cierta y por lo tanto sea posible descomponer el sistema original (asimétrico y desequilibrado) en los tres sistemas simétricos planteados inicialmente.

El mérito de Fortescue fue demostrar esta afirmación a partir de herramientas simples de trigonometría.

3.9.2 Análisis y determinación de las componentes simétricas

Para llevar adelante en términos matemáticos lo explicado en la sección 3.9.1, el planteo analítico se inicia siguiendo la geometría de las Figura 3-26 y Figura 3-27, es decir que para obtener el fasor $\underline{U}_R$ debe realizarse la suma de $\underline{U}_{0R}$, $\underline{U}_{1R}$ y $\underline{U}_{2R}$. Con el mismo razonamiento es posible obtener los fasores $\underline{U}_S$ y $\underline{U}_T$, por lo tanto se puede escribir:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{U}_{0R} + \underline{U}_{1R} + \underline{U}_{2R} \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_{0S} + \underline{U}_{1S} + \underline{U}_{2S} \\ \underline{U}_T &= \underline{U}_{0T} + \underline{U}_{1T} + \underline{U}_{2T} \end{aligned} \qquad \text{Ec. 3-27}$$

Si se supone que $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$ y $\underline{U}_T$ son datos del problema (pues corresponden a la fuente desequilibrada y asimétrica original) y los restantes elementos del sistema de ecuaciones Ec.

3-27 son las incógnitas; observando dicho sistema de ecuaciones pareciera que el mismo no se puede resolver, dado que se tienen más incógnitas que ecuaciones.

Dada la simetría de cada terna de Fortescue, es posible definir un operador matemático con el cual se simplifica el planteo del sistema en cuestión. Por lo tanto se define dicho operador de la siguiente forma:

$$\underline{a} = e^{j\frac{2}{3}\pi} = e^{j120^o} \qquad \text{Ec. 3-28}$$

Conceptualmente, el producto de este operador por un número complejo cualquiera provoca la rotación de $\frac{2}{3}\pi\ \mathrm{rad}$ en sentido antihorario de tal número complejo.

A partir de la definición de la terna homopolar, se puede escribir:

$$\underline{U}_{0R} = \underline{U}_{0S} = \underline{U}_{0T} = \underline{U}_0 \qquad \text{Ec. 3-29}$$

Tomando en cuenta la asignación siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1R} &= \underline{U}_1 \\ \underline{U}_{2R} &= \underline{U}_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 3-30}$$

Además, se puede extender la asignación, teniendo en cuenta el operador $\underline{a}$, a los siguientes números complejos de las correspondientes ternas

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1S} &= \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 &= \underline{a} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \underline{U}_{1T} &= \underline{a} \cdot \underline{U}_1 \\ \underline{U}_{2T} &= \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 3-30}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las definiciones anteriores, es posible reescribir el sistema Ec. 3-27 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_1 + \underline{a} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{U}_T &= \underline{U}_0 + \underline{a} \cdot \underline{U}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 3-31}$$

Es decir que es posible escribir el sistema Ec. 3-27 de manera que la cantidad de incógnitas quede reducida a tres: $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$ y $\underline{U}_2$, las cuales suelen denominarse *componentes llave*. Esta denominación no es casual; teniendo en cuenta que en idioma inglés la palabra *key* significa *llave* y también *clave*. Resulta claro cómo debe entenderse: las componentes $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$ y $\underline{U}_2$ son la llave (o la clave) para construir los tres sistemas o ternas simétricas que representan un sistema trifásico desequilibrado y asimétrico. Esto se puede observar claramente en el sistema Ec. 3-31.

Este sistema también podría escribirse en forma matricial, como se indica en Ec. 3-32.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 3-32}$$

Aplicando álgebra matricial, es posible escribir el sistema que permita obtener las incógnitas $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$ y $\underline{U}_2$ en función de las magnitudes conocidas $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$ y $\underline{U}_T$, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_S \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 3-33}$$

de forma que:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix}, \qquad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}, \qquad [A][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 3-34}$$

3.10 Potencia en sistemas trifásicos

3.10.1 Definiciones

Recordando la teoría relacionada con el estudio de la potencia en circuitos con tensiones y corrientes alternas monofásicos, y para el esquema de la Figura 3-28, valen las formulas de la Tabla 1-2 que se transcriben en la Ec. 3-35.

Figura 3-28 Esquema general para la definición de potencia en alterna.

$$\begin{aligned} P &= U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos(\phi) \\ Q &= U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot sen(\phi) \\ S^2 &= P^2 + Q^2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 3-35}$$

donde ϕ es el ángulo entre $\underline{U}$ e $\underline{I}$

Los resultados de las Ec. 3-35 son aplicables a cualquier impedancia, con lo cual su aplicación a las diferentes impedancias individuales que conforman cualquier carga trifásica es totalmente válida.

Asimismo, una vez determinadas las P y Q de cada impedancia individual, las respectivas potencias y cargas reactivas totales del circuito trifásico se determinarán mediante la suma de las correspondientes P y Q individuales. Finalmente, la carga aparente total se puede obtener vinculando las potencias y cargas reactivas totales mediante el teorema de Pitágoras.

Para el caso de un circuito conexión Y-Y de la Figura 3-29 se pueden escribir las Ec. 3- 36.

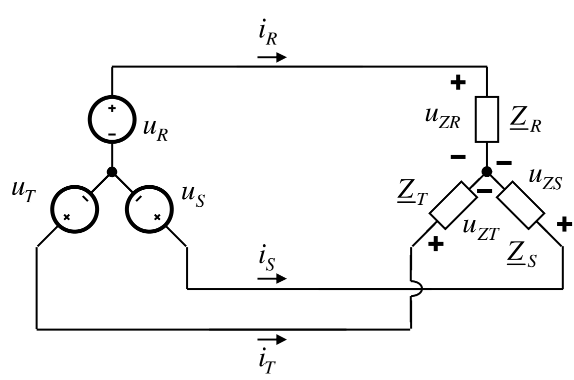


Figura 3-29 Circuito trifásico Y-Y.

$$u_{fR}(t) = U_R \cdot sen(\omega t) \qquad i_R(t) = I_R \cdot sen(\omega t - \phi_R)$$
$$u_{fS}(t) = U_S \cdot sen\left(\omega t - \tfrac{3}{2}\pi\right) \qquad i_S(t) = I_S \cdot sen\left(\omega t - \tfrac{3}{2}\pi - \phi_S\right)$$
$$u_{fT}(t) = U_T \cdot sen\left(\omega t + \tfrac{3}{2}\pi\right) \qquad i_T(t) = I_T \cdot sen\left(\omega t + \tfrac{3}{2}\pi - \phi_T\right)$$

Ec. 3-36

Luego, tomando las corrientes y tensiones en valor eficaz

$$P_R = U_{R_{ef}} \cdot I_{R_{ef}} \cdot cos(\phi_R)$$
$$P_S = U_{S_{ef}} \cdot I_{S_{ef}} \cdot cos(\phi_S)$$
$$P_T = U_{T_{ef}} \cdot I_{T_{ef}} \cdot cos(\phi_T)$$

Ec. 3-37

y

$$P_{Total} = P_R + P_S + P_T = U_{efR} \cdot I_{efR} \cdot cos(\phi_R) + U_{efS} \cdot I_{efS} \cdot cos(\phi_S) + U_{efT} \cdot I_{efT} \cdot cos(\phi_T)$$

$$Q_R = U_{efR} \cdot I_{efR} \cdot sen(\phi_R)$$
$$Q_S = U_{efS} \cdot I_{efS} \cdot sen(\phi_S)$$
$$Q_T = U_{efT} \cdot I_{efT} \cdot sen(\phi_T)$$

Ec. 3-38

y

$$Q_{Total} = Q_R + Q_S + Q_T = U_{efR} \cdot I_{efR} \cdot sen(\phi_R) + U_{efS} \cdot I_{efS} \cdot sen(\phi_S) + U_{efT} \cdot I_{efT} \cdot sen(\phi_T)$$

Finalmente

$$S_{total}{}^2 = P_{total}{}^2 + Q_{total}{}^2$$

Ec. 3-39

Si la carga es equilibrada y la fuente es perfecta, resulta

$$U_{fR} = U_{fS} = U_{fT} = U$$
$$I_R = I_S = I_T = I$$
$$\phi_R = \phi_S = \phi_T = \phi$$

Ec. 3-40

Luego las Ec. 3-37 y Ec. 3-38 se pueden reescribir como las Ec.9-41 y 9-42

$$P_R = P_S = P_T = P = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos(\phi)$$

y Ec. 3-41

$$P_{Total} = 3 \cdot P = 3 \cdot U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos(\phi)$$

$$Q_R = Q_S = Q_T = Q = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot sen(\phi)$$

y Ec. 3-42

$$Q_{total} = 3 \cdot Q = 3 \cdot U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot sen(\phi)$$

Se podría haber planteado la potencia a partir de su definición mediante la Ec. 3-43.

$$p(t) = i_R(t) \cdot u_{\underline{Z}_R}(t) + i_S(t) \cdot u_{\underline{Z}_S}(t) + i_T(t) \cdot u_{\underline{Z}_T}(t) \quad \text{Ec. 3-43}$$

Se deja como ejercicio para el lector verificar que, si la fuente es perfecta y la carga equilibrada, la Ec. 3-43 resulta:

$$p(t) = 3 \cdot U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos\phi = P_{total} \quad \text{Ec. 3-44}$$

En la Ec. 3-44 U_{ef} corresponde a la tensión de fase de la fuente o de la carga e I_{ef} a la corriente de línea, mientras que ϕ es el ángulo de la carga.

Muchas veces un sistema trifásico se presenta mediante esquemas de bloques, en particular en circuitos trifásicos trifilares, como en la Figura 3-30. En estos casos las magnitudes accesibles son las corrientes de línea y las tensiones de línea. En particular, si el sistema es perfecto, sería posible escribir la potencia P en función de las tensiones y corrientes de línea y del ángulo de la carga utilizando la Ec. 3-10, resultando la Ec. 3-45.

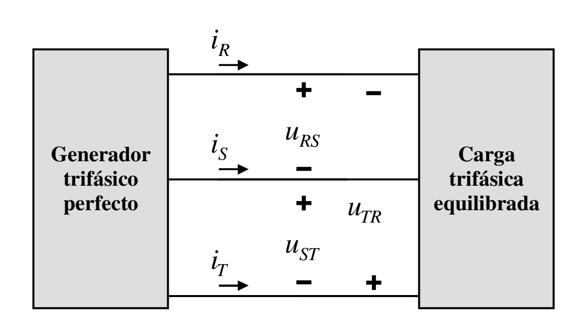


Figura 3-30 Esquema de un circuito trifásico trifilar.

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{L_{ef}} \cdot I_{L_{ef}} \cdot cos(\phi) \quad \text{Ec. 3-45}$$

Se sugiere al lector verificar la validez de la expresión de P de la Ec. 3-45 para todas las conexiones posibles: Y-Y, Y-Δ, Δ-Δ y Δ-Y.

3.10.2 Factor de potencia trifásico

En sistemas trifásicos sigue siendo válida la definición del factor de potencia FP vista en el capítulo 1, siempre y cuando el sistema posea fuente perfecta y carga equilibrada.

En efecto, en la mencionada condición de equilibrio y simetría de fuente y carga, las tensiones y corrientes en las tres impedancias son iguales entre sí y están separadas el mismo ángulo respectivamente; por lo tanto, los FP de las tres cargas son iguales y en consecuencia es posible representar la condición de la carga completa.

En caso contrario, si cada impedancia de la carga posee un diferente valor de FP, ya no es posible representar mediante un único FP al conjunto de la carga trifásica.

3.10.3 Medición de potencia

Wattímetro

Para la medición de la potencia trifásica, es necesario recordar el esquema y funcionamiento del wattímetro.

Como se vio en la sección 1.7, este instrumento presenta como lectura el valor de la potencia media $\mathrm{P}=\overline{u(t)\cdot i(t)}$ correspondiente a la tensión y la corriente aplicadas sobre el mismo según el esquema de la Figura 1-26 reiterada en la Figura 3-31 (recordando, la corriente entre los terminales **1** y **2**, bornes de corriente, y la tensión entre los terminales **1** y **3** ó **2** y **3**, siendo **3** el borne de referencia para la tensión).

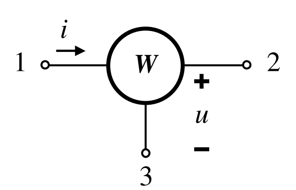


Figura 3-31 Esquema de un wattímetro.

Si la corriente y la tensión aplicadas son alternas senoidales, a partir del estudio ya visto de la potencia en estas condiciones para un circuito monofásico, el valor antes mencionado se puede expresar matemáticamente como indica la Ec. 3-46.

$$P_W = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos(\phi_{ui}) \qquad \text{Ec. 3-46}$$

En base a lo desarrollado en la sección 3.10 respecto del cálculo de la potencia trifásica, en los párrafos que siguen se plantea la medición de la potencia en circuitos trifásicos utilizando wattímetros.

Aplicación de un wattímetro a la medición de potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga equilibrada con conductor neutro

En primera instancia se propone realizar la medición de potencia en un circuito con fuente perfecta y carga equilibrada con conductor neutro.

Se puede observar que en este caso, dado que al ser la carga trifásica equilibrada y por ende las tres impedancias iguales, la potencia en las tres fases debe ser la misma, por lo cual se propone utilizar el esquema de la Figura 3-32.

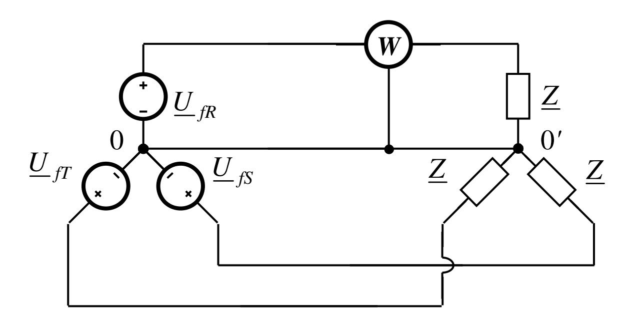


Figura 3-32 Medición de la potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga equilibrada utilizando un wattímetro.

En la Figura 3-32 el wattímetro tiene aplicadas la corriente por la línea de la fase R y la tensión entre dicha línea y el neutro, es decir, la tensión de la fase R. En consecuencia, la Ec. 3-46 se puede escribir como muestra la Ec. 3-47.

$$P_{W_R} = U_{R_{ef}} \cdot I_{R_{ef}} \cdot cos\left(\phi_{u_R i_R}\right) \qquad \text{Ec. 3-47}$$

Si los bornes de corriente del mismo wattímetro se conectaran ahora sobre la línea S, pero manteniendo el borne de referencia de tensión conectado al neutro, el resultado se muestra en la Ec. 3-48.

$$P_{W_S} = U_{S_{ef}} \cdot I_{S_{ef}} \cdot cos\left(\phi_{u_S i_S}\right) \qquad \text{Ec. 3-48}$$

De la misma forma sucede si el instrumento se conecta a la línea restante resulta la Ec. 3-49.

$$P_{W_T} = U_{T_{ef}} \cdot I_{T_{ef}} \cdot cos\left(\phi_{u_T i_T}\right) \qquad \text{Ec. 3-49}$$

Es fácil entender por qué las tres potencias deben resultar iguales. Observando las Ec. 3-47, Ec. 3-48 y Ec. 3-49, se advierte que los valores eficaces de las tensiones y de las corrientes son iguales; de la misma forma los desfasajes entre las correspondientes tensiones y corrientes también son iguales, consecuencia de la simetría de la carga y de la fuente. Además, en el circuito planteado sería posible aplicar el equivalente monofásico visto en la sección 3.8, y de su análisis es posible llegar a dicha conclusión. Finalmente se puede escribir la Ec. 3-50.

$$P_{total} = P_{W_R} + P_{W_S} + P_{W_T} = 3 \cdot P_{W_R} = 3 \cdot P_{W_S} = 3 \cdot P_{W_T} \qquad \text{Ec. 3-50}$$

Es decir que, para un circuito trifásico con fuente perfecta, carga equilibrada y conductor neutro, es posible medir la potencia total multiplicando por 3 la lectura de un solo wattímetro con sus bornes de corriente conectados sobre una de las líneas y el borne de referencia conectado al neutro.

Aplicación de tres wattímetros a la medición de potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga desequilibrada con conductor neutro

En base a lo analizado en párrafo anterior es lógico pensar que, puesto que ahora las tres impedancias de la carga se suponen distintas, conectando un wattímetro en cada línea como muestra la Figura 3-33, la suma de sus lecturas daría como resultado la potencia total en la carga.

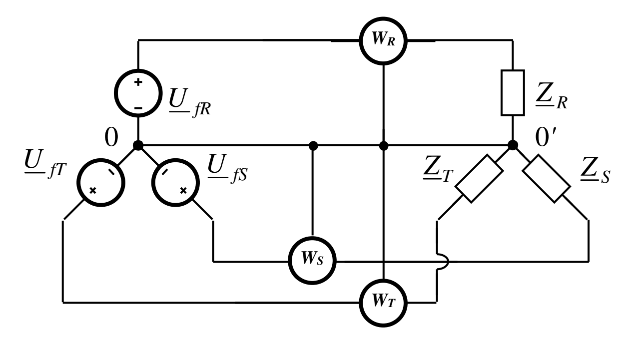


Figura 3-33 Medición de la potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta, carga desequilibrada y con conductor neutro utilizando tres wattímetros.

En efecto, se podrían aplicar las mismas expresiones de las Ec. 3-47, Ec. 3-48 y Ec. 3-49 para obtener la Ec. 3-51 y determinar así la potencia total que muestra la Ec. P-51.

$$P_{total}=P_{W_R}+P_{W_S}+P_{W_T} \qquad \text{Ec. 3-51}$$

Aplicación de dos wattímetros a la medición de potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga desequilibrada sin conductor neutro

Si al circuito de Figura 3-33 se le retirara el neutro, es decir que el centro de estrella de la carga se encontrara aislado del centro de estrella de la fuente, el nodo común de conexión de los bornes de referencia de los wattímetros dejaría de estar asociado a un punto de tensión conocida.

En esas condiciones, sería posible fijar dicho nodo a uno de los conductores de línea del circuito de manera de conseguir dicho punto de tensión conocida, como es el caso de elegir la línea S como muestra la Figura 3-34.

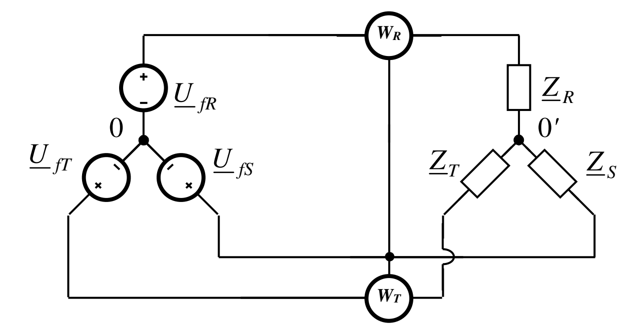


Figura 3-34 Medición de la potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta, carga desequilibrada y sin conductor neutro utilizando dos wattímetros.

Este esquema de medición de la potencia es conocido como el *método de Aron*[24]*,* cuya validez y generalización se puede demostrar mediante el *teorema de Blondel*[25], que se enuncia como sigue.

***Para medir la potencia activa total de un sistema de N conductores basta utilizar N-1 wattímetros y sumar las lecturas, cada una con su signo*.**

Efectivamente, teniendo en cuenta que la potencia en la fuente es la misma que en la carga, la Ec. 3-43 puede reescribirse como muestra la Ec. 3-52.

$$p(t)=i_R(t)\cdot u_{fR}(t)+i_S(t)\cdot u_{fS}(t)+i_T(t)\cdot u_{fT}(t) \qquad \text{Ec. 3-52}$$

Dado que el circuito es sin neutro, $i_R(t)+i_S(t)+i_T(t)=0$ e $i_S(t)=-\left(i_R(t)+i_T(t)\right)$, que remplazado en la anterior expresión y operando da:

$$p(t)=i_R(t)\cdot\left(u_{fR}(t)-u_{fS}(t)\right)+i_T(t)\cdot\left(u_{fT}(t)-u_{fS}(t)\right) \qquad \text{Ec. 3-53}$$

Las dos restas en la Ec. 3-53 no son otras que las tensiones de línea $u_{RS}(t)$ y $u_{TS}(t)$ con lo que dicha ecuación se transforma en:

$$p(t)=i_R(t)\cdot u_{RS}(t)+i_T(t)\cdot u_{TS}(t) \qquad \text{Ec. 3-54}$$

Si ahora se calcula el valor medio de la Ec. 3-53 resulta

$$\overline{p(t)}=\mathrm{P}=\overline{i_R(t)\cdot u_{RS}(t)}+\overline{i_T(t)\cdot u_{TS}(t)} \qquad \text{Ec. 3-55}$$

Es fácil reconocer que la suma de valores medios de la Ec. 3-55 no es otra que la suma de las indicaciones de W_R y de W_S que se indican en las Ec. 3-56 y Ec. 3-57

$$P_{W_R}=U_{ef_{RS}}\cdot I_{ef_R}\cdot cos\left(\phi_{u_{RS}i_R}\right) \qquad \text{Ec. 3-56}$$

$$P_{W_T}=U_{ef_{TS}}\cdot I_{ef_T}\cdot cos\left(\phi_{u_{TS}i_T}\right) \qquad \text{Ec. 3-57}$$

y

$$\mathrm{P}=P_{total}=P_{W_R}+P_{W_S} \qquad \text{Ec. 3-58}$$

Debe quedar en claro que los wattímetros tienen que estar correctamente conectados, lo que significa que se deben respetar las polaridades instantáneas de las tensiones y los sentidos de las corrientes en el circuito respecto de cada instrumento.

Como ejemplo de lo dicho se alienta al lector a resolver el circuito de la Figura 3-34 considerando la fuente de tensiones trifásica perfecta con $\underline{U}_{R0}=j310\,\mathrm{V}$ siendo los valores de las impedancias en la carga $\underline{Z}_R=(4+j5)\ \Omega$, $\underline{Z}_S=(10-j2)\ \Omega$ y $\underline{Z}_T=j8\ \Omega$.

A modo de control se aporta el diagrama fasorial de tensiones y corrientes de la Figura 3-35 y los resultados numéricos de algunos de dichos parámetros en la Tabla 3-2.

---

24 ***Hermann Aron*** *(Polonia), inventó el wattimetro y patentó el primer medidor de energía eléctrica en la década de 1880.*
25 ***André Blondel*** *(Francia), publicó la demostración del teorema en 1893.*

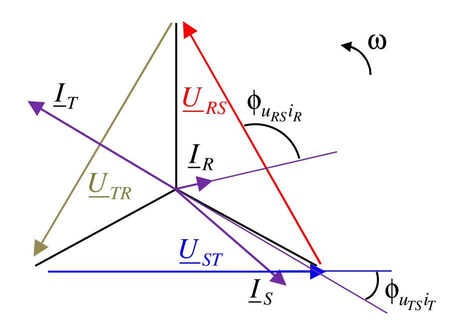


Figura 3-35 Diagrama fasorial del circuito trifásico de la Figura 3-36 teniendo en cuenta las polaridades de las tensiones y los sentidos de las corrientes.

Tabla 3-2 Algunos resultados del circuito

$\underline{U}_{0'}$ [V]	$\underline{I}_R$ [A]	$\phi_{u_{RS}i_R}$ [°]	$\phi_{u_{TS}i_T}$ [°]	$\mathrm{P} = P_{total}$ [W]	P_{W_T} [W]
$-35{,}4 + j237{,}7$	$12{,}3 + j27{,}6$	107,35	30,7	12,18	13,19

Es importante notar que el ejemplo elegido tiene un detalle importante y necesario en el signo de P_{W_R}, de modo que al sumarlo a P_{W_T} se obtenga el correcto resultado de $\mathrm{P} = P_{total}$.

El detalle apuntado es posible por el hecho, que en esta forma de medición, ninguno de los wattímetros indica la potencia de alguna de las impedancias o admitancias de la carga.

Si quedara alguna duda del valor de P_{total}, como es sabido, el mismo puede comprobarse sumando los valores de $I_{ef}^2 \cdot R$ en cada rama de la carga trifásica.

3.11 Referencias bibliográficas

"Method of symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks", C. L. Fortescue. 34th Annual Convention of the American Institute of Electrical Engineers, Atlantic City, N. J., June 28, 1918.

"Symmetrical Componentes", L.J. Myatt. Editorial Pergamon Press.

"Symmetrical Components for Power Systems Engineering", J.L. Blackburn. Serie Electrical Engineering and Electronics. Editorial Marcel Dekker, Inc.

CAPÍTULO 4
Cuadripolos, circuitos de cuatro terminales o bipuertos

Muchas aplicaciones incluyen una red adicional insertada entre la fuente y la carga para propósitos de amplificación, adaptación de impedancia, filtrado, entre otros.

Se trata de elementos que poseen dos pares de terminales, denominados *de entrada* y *de salida*, respectivamente. Muchas veces se denomina *puertos* a dichos pares de terminales, de ahí la denominación *bipuerto*, y dado que poseen cuatro bornes o *polos* (tomados de a pares) es que surge el término *cuadripolo*.

Este tipo de redes es muy importante en aplicaciones de electrónica, comunicaciones, sistemas de control, sistemas de distribución y transmisión de energía, u otro tipo de sistemas en los que una señal eléctrica ingresa por los terminales de entrada, sufre la acción de la red y sale por los terminales de salida.

En este capítulo se presentan las propiedades básicas de las redes de dos puertos y se desarrolla su descripción en términos de los denominados *parámetros del cuadripolo*.

Estos parámetros conducen a modelos compactos, en cierta forma similares a los parámetros del circuito equivalente de Thévenin, por ejemplo.

El punto de vista y las técnicas que aquí se tratan proporcionan los fundamentos generales necesarios para el análisis de filtros, amplificadores o redes de transmisión de cierta complejidad.

4.1 Introducción

En el Capítulo 2 de [1] se presentó el concepto de *dipolo*. Dicho concepto es de aplicación para una rama de circuito eléctrico, tanto pasiva como activa, que se estudia desde dos bornes. Un ejemplo ilustrativo de estos dos posibles tipos de *dipolos* son los equivalentes que resultan al estudiar, en la sección 3-4 del Capítulo 3 de [1], los circuitos de Thevenin y Norton.

Sobre la base de esta última idea podría generalizarse otra forma de análisis del comportamiento de un circuito eléctrico si solo importa la relación causa efecto entre dos pares de terminales del mismo. Lo que se plantea es encontrar relaciones funcionales entre la tensión o la corriente en uno de los pares de terminales con la tensión o corriente en el otro par, considerando el circuito solo a través de esas cuatro magnitudes sin la necesidad de conocer su topología.

En otras palabras, como el circuito se dispone desde cuatro terminales, por extensión del concepto del primer párrafo, el mismo es equivalente a un ***cuadripolo***. Esta definición de elemento de circuito suele aparecer también en la bibliografía como circuito de *dos puertos*, refiriéndose con ese nombre a cada par de terminales.

Como es costumbre, un buen símbolo para representar un *cuadripolo* es el usado para la "caja negra", o sea un rectángulo con un par de terminales a cada lado, representativos de los *dos puertos*, o lo que es lo mismo, de los *cuatro polos*. En la Figura 4-1 se presenta la identificación propuesta.



Figura 4-1: Esquema genérico de un cuadripolo

4.2 Características y propiedades de los cuadripolos

A partir de la presentación del esquema del cuadripolo de la Figura 4-1 valen los siguientes detalles, algunos obvios y otros justificados cuando corresponda, los que deben ser considerados para continuar el estudio de este nuevo componente.

- Se muestran los pares tensión-corriente en cada puerto, con la respectiva convención polaridad-sentido indicadas.
- Está claro, que ambas corriente consideradas entrantes en los bornes de arriba, son salientes en los de abajo.
- Tanto la tensión como la corriente se representan con fasores (o los números complejos correspondientes) ya que señales de alterna son más generales y con considerar pulsación nula toda conclusión vale para continua.
- Los *puertos*, indicados con 1 y 2, también se consideran como de *entrada* y *salida* respectivamente, los que sólo se vinculan a través del cuadripolo, pudiéndose inter-

cambiar ambas identificaciones como se verá más adelante.

- Los componentes del circuito, cuyo equivalente es el cuadripolo, pueden ser tanto pasivos como activos. Sin embargo el estudio que sigue se refiere al caso de solo elementos pasivos (como los conocidos hasta ahora) los que, se sabe, son lineales.[26]

Este detalle de cuadripolos pasivos determina otra característica que tiene que ver con la linealidad resultante del circuito.

Para establecer dicha característica es útil tener en cuenta la sección 3.3.2 del Capítulo 3 de [1] en la que, en el circuito lineal en sentido amplio presentado en la Figura 3-8 (que anticiparía ya un cuadripolo), se concluye que la corriente en la rama de la salida se puede expresar como directamente proporcional a la tensión de la fuente en la entrada.

Ahora se transcribe en la Figura 4-2 el circuito mencionado en el párrafo anterior pero restringiendo el circuito lineal a solo elementos pasivos y cambiando la rama de la izquierda por un amperímetro. El instrumento, validando también la conclusión anterior, mide la corriente $i_b = k_{ab} u_a$. La nomenclatura de los subíndices identifica también las dos mallas en las cuales, respectivamente, la fuente de tensión y el amperímetro, forman parte en las correspondientes ramas propias. La Figura 4-3, es el circuito de la Figura 4-2, intercambiando fuente de tensión por amperímetro que en este caso mide $i_a = k_{ba} u_b$.

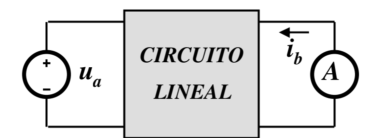


Figura 4-2: Circuito excitado por la izquierda (a) y en corto circuito a la derecha (b)

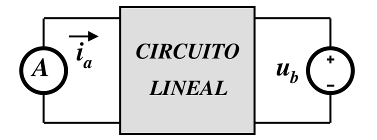


Figura 4-3: Circuito excitado por la derecha (b) y en corto circuito a la izquierda (a)

En forma genérica, el cálculo de k_{ab} y k_{ba} se puede obtener resolviendo por Cramer el sistema de ecuaciones que surgen de aplicar, por ejemplo, del método de análisis de mallas a cada una de las configuraciones anteriores.[27]

Dado que para ambos casos el circuito lineal indicado no cambia, la matriz de simetría diagonal que resulta para cada sistema de ecuaciones es la misma, por lo que el cálculo pretendido muestra que $k_{ab} = k_{ba}$. Por consiguiente, si $u_a = u_b$ implica $i_b = i_a$ o lo que es lo mismo intercambiando las causas entre cada par de bornes los efectos son los mismos.

Este atributo de los circuitos lineales, exclusivamente pasivos, se denomina *reciprocidad* y a su vez fija el comportamiento *bilateral* del mismo, es decir la operación del circuito no tiene un sentido preferencial.[28]

---

[26] En el Capítulo 6 se presentará el concepto de elemento de circuito pasivo alineal.

[27] Repasar el método de análisis de mallas en la sección 3.2 del Capítulo 3 de [1].

[28] La bilateralidad del cuadripolo implica que el mismo no tiene elementos activos independientes. En la sección 4.3 se verifica también esta cualidad con cuadripolos con fuentes dependientes solo de particulares características, que no permite se generalice reciprocidad para este tipo de fuentes.

En definitiva:

- Los cuadripolos pasivos son necesariamente recíprocos o lo mismo bilaterales.

En lo que respecta a la topología del circuito que puede integrar el cuadripolo hay tres tipos:

- Balanceado, los que poseen un eje de simetría longitudinal.
- Simétrico, poseen un eje de simetría transversal. En este tipo de cuadripolos pueden permutarse los terminales de entrada con los de salida sin afectar el comportamiento del circuito
- Asimétrico, obviamente los que no poseen ningún eje de simetría.

Este enfoque de estudio particular de los circuitos eléctricos, con los detalles recién explicados, resulta útil para modelar, entre otros, redes de transmisión de información (cables coaxiles, guías de onda, líneas telefónicas), circuitos acoplados (transformadores), líneas de transmisión de energía eléctrica.[29]

Con el tema presentado, en la siguiente sección se estudian las diferentes configuraciones propias de los cuadripolos.

4.3 Clasificación y parámetros característicos de los cuadripolos

4.3.1 Introducción

El comportamiento del cuadripolo se pude describir mediante las relaciones entre las tensiones y las corrientes en los puertos, expresando dos cualesquiera de tales variables (dependientes) en función de las otras dos (independientes).

Así resultan los seis conjuntos de pares posibles de variables de un tipo para relacionar con las dos restantes en cada caso.

$$\underline{U}_1\,\underline{U}_2;\quad \underline{I}_1\,\underline{I}_2;\quad \underline{U}_1\,\underline{I}_1;\quad \underline{U}_2\,\underline{I}_2;\quad \underline{U}_1\,\underline{I}_2;\quad \underline{U}_2\,\underline{I}_1$$

Dicha relación funcional implica un sistema de dos ecuaciones, que por el carácter pasivo de los elementos que conforman el cuadripolo, deberán ser lineales.

Los coeficientes que afectan a las variables en ecuaciones se denominan *parámetros característicos del cuadripolo*. Su significado físico y unidades de medida dependen de cual sea de los seis el caso elegido.

Las ecuaciones derivadas de $\underline{U}_1\,\underline{U}_2;\ \underline{I}_1\,\underline{I}_2$ son conveniente para estudiar relaciones de transferencia $\underline{I}\ \ \underline{U}$ o $\underline{U}\ \ \underline{I}$. Si el objetivo es un tema de transmisión de energía mejor es el sistema resultante de usar $\underline{U}_1\,\underline{I}_1;\ \underline{U}_2\,\underline{I}_2$[30]. Con $\underline{U}_1\,\underline{I}_2;\ \underline{U}_2\,\underline{I}_1$ las ecuaciones son aplicables para el estudio de equivalente de circuitos acoplados, asociaciones particulares de cuadripolos y como base del

---

[29] También se modelan dispositivos y sistemas electrónicos (transistores, amplificadores, etc.) con cuadripolos, pero en estos casos, estos resultan unilaterales con propiedades y características propias diferentes a los que se estudian en este capítulo.

[30] Este tipo de cuadripolo fue el primero y único estudiado en el inicio del desarrollo de la electrotecnia. El esquema sistemático de seis versiones de este capítulo es muy posterior junto con la aparición de la teoría de los circuitos eléctricos.

modelado de dispositivos electrónicos con la salvedad hecha en el pie de página [3].

Vale la aclaración importante que los planteos a realizar son sólo válidos para régimen permanente.

La Tabla 4-1 muestra el resumen de la clasificación de los seis tipos de cuadripolos posibles indicando característica del conjunto de variables, parámetros con su denominación y correspondientes sistemas de ecuaciones. En el caso de los cuadripolos de transmisión y transmisión inverso (3ª y 4ª fila de la Tabla) las corrientes independientes (las de la salida) tienen signo negativo por razones que serán explicadas en el estudio de los respectivos parámetros en las secciones 4.3.4 y 4.3.5.

Cabe reiterar que, dado el tercer detalle de la sección 4.2, las tensiones y corrientes se expresan como fasores.

Los parámetros, por ser los coeficientes que afectan a las variables independientes en cada sistema de ecuaciones, se escriben con minúscula y resultan números complejos. También cabe aclarar, como surgirá en la siguiente sección, que los mismos pueden tener dimensión (impedancia o admitancia), ser adimensionales y con posibles interpretaciones circuitales.

Tabla 4-1: Clasificación, parámetros y ecuaciones de los cuadripolos

Variables Dependientes	**Variables Independientes**	**Parámetros**	**Ecuaciones**
$\underline{U}_1\ \underline{U}_2$	$\underline{I}_1\ \underline{I}_2$	Impedancia $\underline{z}$	$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\underline{I}_2$
$\underline{I}_1\ \underline{I}_2$	$\underline{U}_1\ \underline{U}_2$	Admitancia $\underline{y}$	$\underline{I}_1 = \underline{y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{y}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{y}_{22}\underline{U}_2$
$\underline{U}_1\ \underline{I}_1$	$\underline{U}_2\ \underline{I}_2$	Transmisión $\underline{a}$	$\underline{U}_1 = \underline{a}_{11}\underline{U}_2 - \underline{a}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{I}_1 = \underline{a}_{21}\underline{U}_2 - \underline{a}_{22}\underline{I}_2$
$\underline{U}_2\ \underline{I}_2$	$\underline{U}_1\ \underline{I}_1$	Transmisión inverso $\underline{b}$	$\underline{U}_2 = \underline{b}_{11}\underline{U}_1 - \underline{b}_{12}\underline{I}_1$ $\underline{I}_2 = \underline{b}_{21}\underline{U}_1 - \underline{b}_{22}\underline{I}_1$
$\underline{U}_1\ \underline{I}_2$	$\underline{U}_2\ \underline{I}_1$	Híbrido $\underline{h}$	$\underline{U}_1 = \underline{h}_{11}\underline{I}_1 + \underline{h}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{h}_{21}\underline{I}_1 + \underline{h}_{22}\underline{U}_2$
$\underline{U}_2\ \underline{I}_1$	$\underline{U}_1\ \underline{I}_2$	Híbrido inverso $\underline{g}$	$\underline{I}_1 = \underline{g}_{11}\underline{U}_1 + \underline{g}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{g}_{21}\underline{U}_1 + \underline{g}_{22}\underline{I}_2$

A partir de esta sistematización ¿cómo se determinan los parámetros de los seis grupos? El procedimiento es el mismo para cualquiera de los casos y se desarrolla a partir del respectivo sistema de ecuaciones. Como dichos sistemas de ecuaciones aparecen en forma reiterada en casi todos los estudios que siguen, la alternativa de su versión matricial puede resultar una ventaja matemática.

4.3.2 Parámetros de Impedancia ($\underline{z}$)

El sistema de ecuaciones de la 1ª fila de la Tabla 4-1 se transcribe en la Ec. 4-1.

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\underline{I}_2\end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-1}$$

En dicho sistema, anulando alternativamente $\underline{I}_2$ (salida en circuito abierto) e $\underline{I}_1$ (entrada en circuito abierto), pueden obtenerse las fórmulas de cálculo de los parámetros de impedancia, los que a su vez permiten obtener las tensiones en función de las corrientes.

Los resultados de dichas fórmulas, sus respectivas unidades e interpretación circuital están mostrados en la Tabla 4-2.

Tabla 4-2: Parámetros $\underline{z}$

Cálculo	Unidad	Interpretación circuital
$\underline{z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right\|_{\underline{I}_2=0}$	$[\Omega]$	impedancia de entrada con la salida en circuito abierto
$\underline{z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right\|_{\underline{I}_1=0}$	$[\Omega]$	impedancia de transferencia con la entrada en circuito abierto
$\underline{z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right\|_{\underline{I}_2=0}$	$[\Omega]$	impedancia de transferencia con la salida en circuito abierto
$\underline{z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right\|_{\underline{I}_1=0}$	$[\Omega]$	impedancia de salida con la entrada en circuito abierto

La versión matricial de la Ec. 4-1 se muestra en la Ec. 4-2.

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_1 \\ \underline{U}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{z}_{11} & \underline{z}_{12} \\ \underline{z}_{21} & \underline{z}_{22}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\underline{U}_1 \\ \underline{U}_2\end{bmatrix} = [\underline{z}] \cdot \begin{bmatrix}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2\end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-2}$$

En la expresión anterior $[\underline{z}] = \begin{bmatrix}\underline{z}_{11} & \underline{z}_{12} \\ \underline{z}_{21} & \underline{z}_{22}\end{bmatrix}$ resulta la matriz de impedancia del cuadripolo.

Además, por ser el cuadripolo bilateral es fácil comprobar que $\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21}$, y si es simétrico que $\underline{z}_{11} = \underline{z}_{22}$.

Por otra parte, aplicando la LKT al circuito de fuentes dependientes[31] de la Figura 4-4, se obtienen idénticas igualdades que las de la Ec. 4-1.En consecuencia dicho circuito es un equivalente del cuadripolo de parámetros $\underline{z}$ (o de matriz $[\underline{z}]$).

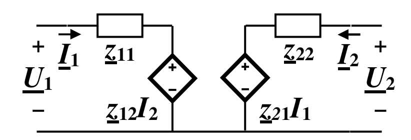


Figura 4-4: Circuito equivalente del cuadripolo de parámetros $\underline{z}$

[31] Recordar que este tipo de fuente también se denominan controladas. Ver sección 2.3.2 de [1]

El circuito de la Figura 4-4, es un ejemplo de lo anticipado en el pie de página [3].

4.3.3 Parámetros de admitancia ($\underline{y}$)

Nuevamente, el sistema de ecuaciones de la 2ª fila de la Tabla 4-1 se transcribe en la Ec. 4-3.

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{y}_{22}\underline{U}_2\end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-3}$$

La observación de la anterior expresión con referencia a la Ec. 4-1 muestra que ambos son duales, por lo que haciendo los cambios pertinentes (tensión/corriente, parámetros de admitancia/parámetros de impedancia y corto circuito/circuito abierto) resulta la Tabla 4-2 y su interpretación circuital.

Tabla 4-3: Parámetros $\underline{y}$

Cálculo	Unidad	Interpretación circuital
$\underline{y}_{11} = \left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right\|_{\underline{U}_2=0}$	[S]	admitancia de entrada con la salida en corto circuito
$\underline{y}_{12} = \left.\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right\|_{\underline{U}_1=0}$	[S]	admitancia de transferencia con la entrada en corto circuito
$\underline{y}_{21} = \left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right\|_{\underline{U}_2=0}$	[S]	admitancia de transferencia con la salida en corto circuito
$\underline{y}_{22} = \left.\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right\|_{\underline{U}_1=0}$	[S]	admitancia de salida con la entrada en corto circuito

En este caso la versión matricial de la Ec. 4-3 es:

$$\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{y}_{11} & \underline{y}_{12}\\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix} = \left[\underline{y}\right]\cdot\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-4}$$

En la Ec. 4-4 $\left[\underline{y}\right] = \begin{bmatrix}\underline{y}_{11} & \underline{y}_{12}\\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22}\end{bmatrix}$ es la matriz de admitancia del cuadripolo.

Y otra vez, como el cuadripolo es bilateral, $\underline{y}_{12} = \underline{y}_{21}$ y si es simétrico $\underline{y}_{11} = \underline{y}_{22}$.

Por último, en la versión dual del circuito de la Figura 4-4 mostrado en la Figura 4-5 la aplicación de la LKC obviamente da el mismo resultado que las Ec. 4-3 y por lo tanto resulta un equivalente del cuadripolo de parámetros $\underline{y}$ (o de matriz $\left[\underline{y}\right]$).

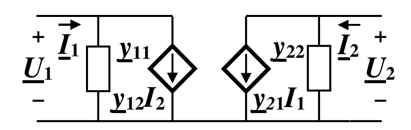


Figura 4-5: Circuito equivalente del cuadripolo de parámetros $\underline{y}$

Conocidos ya los parámetros de impedancia y admitancia, duales entre sí, puede verificarse equivalencia entre los valores de cada matriz.

En efecto, a partir de la segunda expresión de la Ec. 4-4, se multiplica ambos miembros por $\left[\underline{y}\right]^{-1}$ resultando la Ec. 4-5

$$\left[\underline{y}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-5}$$

El resultado obtenido no es otro que el de la Ec. 4-2, por lo que se satisface

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_{11} & \underline{z}_{12} \\ \underline{z}_{21} & \underline{z}_{22} \end{bmatrix} = \left[\underline{y}\right]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \underline{y}_{22} & -\underline{y}_{12} \\ -\underline{y}_{21} & \underline{y}_{11} \end{bmatrix}}{\left\|\left[\underline{y}\right]\right\|} \qquad \text{Ec. 4-6}$$

recordando que $\left\|\left[\underline{y}\right]\right\|$ es el determinante de $\left[\underline{y}\right]$.

Con seguridad el lector puede verificar que también se cumple la Ec. 4-7.

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_{11} & \underline{y}_{12} \\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22} \end{bmatrix} = \left[\underline{z}\right]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \underline{z}_{22} & -\underline{z}_{12} \\ -\underline{z}_{21} & \underline{z}_{11} \end{bmatrix}}{\left\|\left[\underline{z}\right]\right\|} \qquad \text{Ec. 4-7}$$

Conclusión parcial: conocidos los parámetros $\underline{y}$ se puede obtener los parámetros $\underline{z}$ y viceversa.

4.3.4 Parámetros de transmisión ($\underline{a}$)

En la introducción de la sección 4.3.1 se anticipó que la versión de cuadripolos en los que se describe la relación entre la tensión y la corriente de un puerto en relación a la tensión y corriente del otro puerto se utiliza para estudiar las líneas de transmisión de energía eléctrica. La asociación de estas líneas para cumplir dicho objetivo se materializa conectando el final de una línea con el principio de la siguiente, resultando entonces que el sentido de la corriente saliente en la primera sea el mismo que el entrante en la segunda.

Por lo dicho en el párrafo anterior, en la determinación de los parámetros de la 3ª y 4ª fila de la Tabla 4-1 el cuadripolo se considera con $\underline{I}_2$ saliente como muestra la Figura 4-6, justificando así el signo negativo en los sistemas de ecuaciones.



Figura 4-6: Cuadripolo de parámetros $\underline{a}$ que muestra el sentido de la corriente de salida

Como en los casos anteriores, se transcribe el sistema de ecuaciones de la 3ª fila de la Tabla 4-1 en la Ec. 4-8.

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{a}_{11}\underline{U}_2 - \underline{a}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{a}_{21}\underline{U}_2 - \underline{a}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-8}$$

En el anterior sistema, anulando ahora alternativamente $\underline{I}_2$ (salida en circuito abierto) e $\underline{U}_2$ (salida en corto circuito), surgen los resultados mostrados en la Tabla 4-4 y su interpretación.

Tabla 4-4: Parámetros $\underline{a}$

Cálculo	Unidad	Interpretación circuital
$\underline{a}_{11} = \left.\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right\|_{\underline{I}_2=0}$	adimensional	**Inversa de la ganancia de tensión con la salida en circuito abierto.**
$\underline{a}_{12} = \left.\dfrac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2}\right\|_{\underline{U}_2=0}$	$[\Omega]$	Impedancia de transferencia con la salida en cortocircuito
$\underline{a}_{21} = \left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right\|_{\underline{I}_2=0}$	$[\text{S}]$	Admitancia de transferencia con la salida en circuito abierto.
$\underline{a}_{22} = \left.\dfrac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2}\right\|_{\underline{U}_2=0}$	adimensional	Inversa de la ganancia de corriente con la salida en cortocircuito.

La versión matricial de la Ec. 4-8 es:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{a}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-9}$$

Y en la Ec. 4-9 $[\underline{a}] = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix}$ resulta la matriz de transmisión del cuadripolo.

En la expresión matricial de la Ec. 4-9, el *vector* representativo de los fasores de tensión y corriente de salida que multiplica a $[\underline{a}]$ tiene el signo negativo para $\underline{I}_2$, consecuencia de lo dicho en el párrafo anterior a la Figura 4-6.

Resulta interesante establecer el valor particular de $\left\|[\underline{a}]\right\|$. Para tal fin se escriben las ecuaciones de parámetros $\underline{y}$ del cuadripolo de la Figura 4-6 con el ya mencionado detalle del sentido de la corriente en el puerto 2, $-\underline{I}_2$, resultando el sistema de la Ec. 4-10.

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{y}_{12}\underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 &= \underline{y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{y}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-10}$$

Despejando $\underline{U}_1$ de la 2ª ecuación se obtiene:

$$\underline{U}_1 = -\frac{\underline{y}_{22}}{\underline{y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{y}_{12}}\underline{I}_2 \qquad \text{Ec. 4-11}$$

Reemplazando la Ec. 4-11 en la 1ª formula de la Ec. 4-10 y operando resulta

$$\underline{I}_1 = -\frac{\left\|[\underline{y}]\right\|}{\underline{y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{\underline{y}_{11}}{\underline{y}_{12}}\underline{I}_2 \qquad \text{Ec. 4-12}$$

Las Ec. 4-11 y Ec. 4-12 conforman el sistema de parámetros $\underline{a}$ por lo que se cumple

$$a_{11} = -\frac{y_{22}}{y_{21}} \quad a_{12} = -\frac{1}{y_{21}} \quad a_{21} = -\frac{\left\|[\underline{y}]\right\|}{y_{21}} \quad a_{22} = -\frac{y_{11}}{y_{12}} \qquad \text{Ec. 4-13}$$

Con estas igualdades, la determinación del objetivo propuesto resulta

$$\left\|[\underline{a}]\right\| = \underline{a}_{11}\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12}\underline{a}_{21} = \frac{\underline{y}_{22}\underline{y}_{11} - \left(\underline{y}_{22}\underline{y}_{11} - \underline{y}_{12}\underline{y}_{21}\right)}{\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}} = 1 \qquad \text{Ec. 4-14}$$

Además de esta particularidad, propia del carácter recíproco del cuadripolo, y si es simétrico, de las igualdades de la Ec. 4-13 se verifica que $\underline{a}_{11} = \underline{a}_{22}$.

Si ahora, como se realizará para los parámetros de impedancia o admitancia, se pretende encontrar el circuito equivalente de fuentes dependientes solo función de los parámetros $\underline{a}$ que reemplace al cuadripolo dentro de la “caja negra”, no se llegaría a resultado alguno.

Como corresponde a todo circuito equivalente dicho el mismo debe reemplazar al original sin que lo perciban tanto el par tensión/corriente de la entrada como el de la salida. Además, al aplicar mallas y/o nodos al mismo debe dar el sistema mostrado en la Ec. 4-8.

Respecto a equivalencias posibles de estos parámetros $\underline{a}$, la Ec. 4-13 da $\underline{a} = f\left(\underline{y}\right)$ y teniendo en cuenta la Ec. 4-7 o sea $\underline{y} = f\left(\underline{z}\right)$, remplazada en anterior resulta $\underline{a} = f\left(\underline{z}\right)$

En la sección 4.5 se presenta un resumen completo de las equivalencias entre los distintos parámetros y sus características particulares.

4.3.5 Parámetros de transmisión inverso ($\underline{b}$)

Como su nombre lo indica, estos parámetros son los que corresponden a cuadripolos en los que interesa la relación de pares de tensión/corriente, al revés de lo estudiado en la sección anterior. Por ese motivo, y por los mismos fundamentos del cuadripolo de transmisión, en este caso el circuito a analizar es el de la Figura 4-7, siendo ahora $\underline{I}_1$ cambiado de sentido respecto de las convenciones fijadas.



Figura 4-7: Cuadripolo de parámetros $\underline{b}$ con el cambio del sentido de la corriente de entrada

Siguiendo el procedimiento de las anteriores secciones para determinar los parámetros, se transcribe el sistema de ecuaciones de la 4ª fila de la Tabla 4-1 en la Ec. 4-15.

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{b}_{11}\underline{U}_1 - \underline{b}_{12}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{b}_{21}\underline{U}_1 - \underline{b}_{22}\underline{I}_1 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-15}$$

Anulando ahora, alternativamente $\underline{I}_1$ (entrada en circuito abierto) y $\underline{U}_2$ (entrada en corto circuito), surgen los resultados mostrados en la Tabla 4-5 e interpretaciones.

Tabla 4-5: Parámetros $\underline{b}$

Cálculo	**Unidad**	**Interpretación circuital**
$\underline{b}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right\vert_{\underline{I}_1=0}$	adimensional	Ganancia de tensión cuando la entrada está en circuito abierto.
$\underline{b}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_1}\right\vert_{\underline{U}_1=0}$	$[\Omega]$	Impedancia de transferencia con la entrada en cortocircuito.
$\underline{b}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right\vert_{\underline{I}_1=0}$	$[\mathrm{S}]$	Admitancia de transferencia con la entrada en circuito abierto.
$\underline{b}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1}\right\vert_{\underline{U}_1=0}$	adimensional	Ganancia de corriente cuando la entrada está en cortocircuito.

La versión matricial de la Ec. 4-15 es:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{b}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-16}$$

Y en la Ec. 4-16 $[\underline{b}] = \begin{bmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} \end{bmatrix}$ resulta la matriz de transmisión del cuadripolo.

También son válidas las explicaciones hechas respecto del signo de $\underline{I}_2$, ahora para $\underline{I}_1$.

La equivalencia de los parámetros $\underline{a}$ con los parámetros $\underline{b}$ permite concluir las características propias de estos últimos

En efecto, la vinculación tensiones y corrientes mediante $[\underline{a}]$ en el cuadripolo de la Figura 4-7 considerando que los sentidos de las corrientes en el mismo son opuestos a los del de la Figura 4-6, da el resultado siguiente

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-16}$$

Multiplicando la Ec. 4-16 por $[a]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= a_{22}\underline{U}_1 - \underline{a}_{12}\underline{I}_1 \\ -\underline{I}_2 &= -\underline{a}_{21}\underline{U}_1 + \underline{a}_{11}\underline{I}_1 \end{aligned}$$

Y operando algebraicamente en la 2ª fórmula

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= a_{22}\underline{U}_1 - \underline{a}_{12}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{a}_{21}\underline{U}_1 - \underline{a}_{11}\underline{I}_1 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-17}$$

La Ec. 4-17 resulta el sistema propio de los parámetros $\underline{b}$ pero escrito con una matriz función de los parámetros $\underline{a}$, es decir

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{22} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{11} \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-18}$$

La equivalencia de la Ec. 4-18 permite concluir que, el carácter reciproco del cuadripolo también determina $\left|[\underline{b}]\right| = 1$, y si es simétrico $\underline{b}_{11} = \underline{b}_{22}$.

Vale el mismo comentario hecho para el cuadripolo de transmisión respecto a un circuito equivalente de fuentes dependientes satisfactorio

Por último, la igualdad de la Ec. 4-18 amplia la equivalencia entre los cuatro parámetros estudiados hasta ahora.

4.3.6 Parámetros híbridos ($\underline{h}$)

Los parámetros $\underline{h}$, y los últimos a estudiar en la próxima sección, permiten obtener relaciones cruzadas entre las variables de entrada y de salida. Para esta sección corresponde a la tensión de entrada y la corriente de salida como función de la tensión de salida y la corriente de entrada, respectivamente.

Con el proceder de los casos anteriores, nuevamente con las dos corrientes entrantes, se obtienen los resultados que se presentan seguidamente. Planteando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{h}_{11}\underline{I}_1 + \underline{h}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{h}_{21}\underline{I}_1 + \underline{h}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-19}$$

Su versión matricial resulta

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{h}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-20}$$

con $[\underline{h}] = \begin{bmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{bmatrix}$ matriz de parámetros $\underline{h}$.

La Tabla 4-6 muestra el cálculo de los parámetros, su respectiva unidad e interpretación circuital.

Tabla 4-6: Parámetros $\underline{h}$

Cálculo	Unidad	Interpretación circuital
$\underline{h}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right\|_{\underline{U}_2=0}$	$[\Omega]$	Impedancia de entrada cuando la salida está en cortocircuito.
$\underline{h}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right\|_{I_1=0}$	adimensional	Inversa de la ganancia de tensión cuando la entrada está a circuito abierto.
$h_{21} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right\|_{U_2=0}$	adimensional	Ganancia de corriente cuando la salida está en cortocircuito.
$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right\|_{I_1=0}$	$[S]$	Admitancia de salida cuando la entrada está a circuito abierto.

El circuito equivalente se muestra en la Figura 4-8.

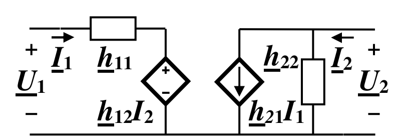


Figura 4-8: Circuito equivalente de cuadripolo de parámetros $\underline{h}$

Se cumple que, si el cuadripolo es recíproco, $\underline{h}_{12} = -\underline{h}_{21}$ y si es simétrico $\left|[\underline{h}]\right| = 1$.

En la Tabla 4-6 se aprecia que estos parámetros son de distinta naturaleza, característica esta que corresponde a la 2º acepción del significado de ***híbrido*** del DLE[32], justificando el porqué de la asignación del dicho nombre. Los parámetros de transmisión también son de distinta naturaleza, pero el cuadripolo de transmisión, ya se dijo fue el primero estudiado, y su objetivo de representatividad ya le había dado nombre

4.3.7 Parámetros híbridos inverso ($\underline{g}$)

Estos últimos parámetros, los $\underline{g}$, permiten obtener la corriente de entrada y la tensión de salida como función de la tensión de entrada y la corriente de salida.

Para los mismos, el sistema de ecuaciones resulta

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{g}_{11}\underline{U}_1 + \underline{g}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{g}_{21}\underline{U}_1 + \underline{g}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-21}$$

Y su versión matricial

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \left[\underline{g}\right] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 4-22}$$

[32] Híbrido: adj. Dicho de una cosa: Que es producto de elementos de distinta naturaleza.

con $\left[\underline{g}\right]=\begin{bmatrix}\underline{g}_{11} & \underline{g}_{12}\\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22}\end{bmatrix}$ matriz de parámetros $\underline{g}$

El cálculo de los parámetros, unidades e interpretación circuital están en la Tabla 4-7.

El circuito equivalente se presenta en la Figura 4-9.

Figura 4-9: Circuito equivalente de cuadripolo de parámetros $\underline{g}$

Tabla 4-7: Parámetros $\underline{g}$

Cálculo	Unidad	Interpretación circuital
$\underline{g}_{11}=\left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right\vert_{\underline{I}_2=0}$	$[\mathrm{S}]$	Admitancia de entrada con la salida en circuito abierto.
$\underline{g}_{12}=\left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right\vert_{\underline{U}_1=0}$	adimensional	Inversa de la ganancia de corriente con la entrada en cortocircuito.
$\underline{g}_{21}=\left.\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right\vert_{\underline{I}_2=0}$	adimensional	Inversa de la ganancia de tensión con la salida en circuito abierto.
$\underline{g}_{22}=\left.\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right\vert_{\underline{U}_1=0}$	$[\Omega]$	Impedancia de salida con la entrada en cortocircuito

Si el cuadripolo es recíproco resulta $\underline{g}_{12}=-\underline{g}_{21}$, y si es simétrico $\left\vert\left[\underline{g}\right]\right\vert=1$.

4.4 Asociación de cuadripolos

Uno de los problemas más interesantes relacionados con el uso de los cuadripolos es la conexión entre los mismos.

Algunos circuitos contienen más de una red de dos puertos o incluso pueden ser vistas de esa manera para propósitos de análisis o diseño.

Se supone que cuando las redes de dos puertos se conectan entre sí, las interconexiones no modifican las propiedades individuales de las mismas; de lo contrario, el método de análisis se invalidaría.

La Tabla 4-8 indica las posibles asociaciones de cuadripolos y su matriz resultante:

Tabla 4-8: Interconexión de cuadripolos

Configuración		Matriz resultante
Serie	1 2	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}_2$
Paralelo	1 2	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}_2$
Serie - Paralelo	1 2	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}_{SP} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}_2$
Paralelo - Serie	1 2	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_{PS} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_2$
Cascada	1 2	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_2$

4.5 Estudio del cuadripolo cargado

Un cuadripolo cargado es, en el caso más general, un cuadripolo con una impedancia $\underline{Z}_2$ conectada en el puerto de salida y excitada en el puerto de entrada por una fuente de tensión en serie con otra impedancia $\underline{Z}_1$ de modo de representar un caso de fuente real, como indica la Figura 4-10:

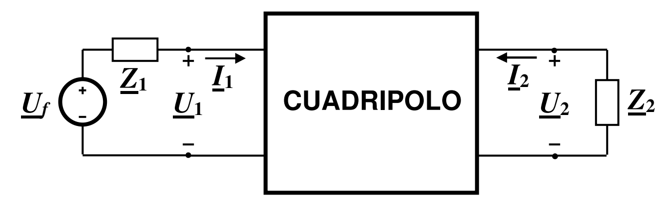


Figura 4-10: Circuito genérico de un cuadripolo cargado.

Para realizar el análisis de este cuadripolo se puede considerar el mismo caracterizado por los parámetros $\underline{z}$ por lo que puede reemplazarse el rectángulo por la ya conocida versión de fuentes dependientes mostrada en la Figura 4-11.

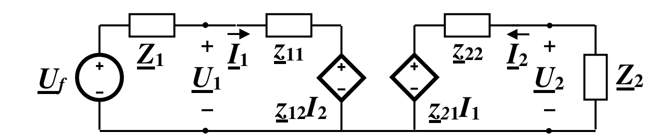


Figura 4-11: Circuito de parámetros $\underline{z}$,versión fuentes dependientes, del cuadripolo cargado

Para cualquiera de las dos esquemas circuitales valen las formulas mostradas en las Ec. 4-23, Ec. 4-24, Ec. 4-25 y Ec. 4-26

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_f - \underline{I}_1 \underline{Z}_1 \quad \text{Ec. 4-23}$$

$$\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 \underline{Z}_2 \quad \text{Ec. 4-24}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{z}_{12} \underline{I}_2 \quad \text{Ec. 4-25}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{z}_{22} \underline{I}_2 \quad \text{Ec. 4 26}$$

A partir de las ecuaciones anteriores pueden determinarse los siguientes parámetros del circuito:

1. *Impedancia de entrada que ve a fuente de tensión real* $\underline{Z}_E$.

Reemplazando la Ec. 4-26 en la Ec. 4-24 y despejando $\underline{I}_2$ resulta:

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{z}_{21} \underline{I}_1}{\underline{z}_{22} + Z_2} \quad \text{Ec. 4-27}$$

Con el valor de la Ec. 4-27 en la Ec. 4-22 se obtiene:

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11} \underline{I}_1 - \frac{\underline{z}_{12} \cdot \underline{z}_{21} \underline{I}_1}{\underline{z}_{22} + Z_2} \quad \text{Ec. 4-28}$$

Y finalmente, algebra de por medio:

$$\underline{Z}_E = \underline{U}_1 / \underline{I}_1 = \underline{z}_{11} - \frac{\underline{z}_{12} \cdot \underline{z}_{21}}{\underline{z}_{22} + Z_2} \quad \text{Ec. 4-29}$$

2. *Corriente de salida* $\underline{I}_2$.

Observando la malla de la derecha en el circuito de la Figura 4-24 resulta:

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{z}_{21} \cdot \underline{I}_1}{\underline{z}_{22} + \underline{Z}_2} \quad \text{Ec. 4-30}$$

Ahora de la malla izquierda surge

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_f - \underline{z}_{12} \underline{I}_2}{\underline{z}_{11} + \underline{Z}_1} \quad \text{Ec. 4-31}$$

Reemplazando la Ec. 4-31 en la Ec. 4-30 y despejando $\underline{I}_2$ se obtiene

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{z}_{12} \cdot \underline{U}_f}{\left(\underline{z}_{11} + \underline{Z}_1\right) \cdot \left(\underline{z}_{22} + \underline{Z}_2\right) - \underline{z}_{12} \cdot \underline{z}_{21}} \quad \text{Ec. 4-32}$$

3. *Circuito equivalente de Thevenin que ve* $\underline{Z}_2$

En la Figura 4-12 se muestran los circuitos a analizar para obtener $\underline{U}_{TH}$ (izquierda) y $\underline{Z}_{TH}$ (derecha).

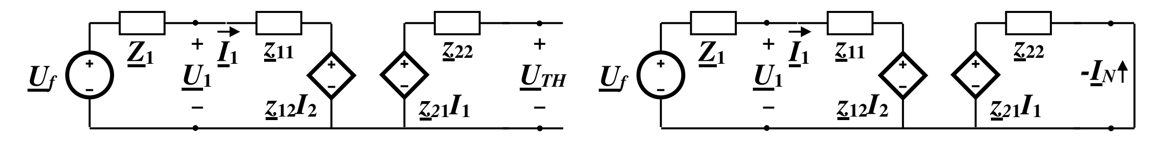


Figura 4-12: Circuito de la Figura 4-11 modificados para obtener $\underline{U}_{TH}$ y $\underline{Z}_{TH}$

En el circuito de la izquierda de la Figura 4-12 dado que $\underline{I}_2 = 0$:

$$\underline{U}_{TH} = \underline{z}_{21}\underline{I}_1 \quad \text{Ec. 4-33}$$

El valor de $\underline{I}_1$ sale de la Ec. 4-23 con $\underline{I}_2 = 0$ dando en definitiva:

$$\underline{U}_{TH} = \frac{\underline{z}_{21}\underline{U}_f}{\underline{Z}_1 + \underline{z}_{11}} \quad \text{Ec. 4-34}$$

Ahora en el circuito de la derecha de la Figura 4-12, dado que $\underline{Z}_2 = 0$, considerando la Ec. 4-22 y teniendo en cuenta que se indica $-\underline{I}_N$, esta resulta:

$$\underline{I}_N = -\underline{I}_2 = \frac{\underline{z}_{12}\underline{U}_f}{(\underline{z}_{11} + \underline{Z}_1)\cdot \underline{z}_{22} - \underline{z}_{12}\cdot \underline{z}_{21}} \quad \text{Ec. 4-35}$$

Entre las dos ecuaciones anteriores se consigue:

$$\underline{Z}_{TH} = \frac{\underline{U}_{TH}}{\underline{I}_N} = \underline{z}_{22} - \frac{\underline{z}_{12}\cdot \underline{z}_{21}}{\underline{Z}_1 + \underline{z}_{11}} \quad \text{Ec. 4-36}$$

4. *"Ganancia" de tensión* $\underline{U}_2/\underline{U}_1$

La relación de tensiones del título anterior puede lograrse a partir de la relación de corriente que surge de la Ec. 4-30 multiplicada por la relación $\underline{Z}_2/\underline{Z}_E$.

Efectivamente

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\cdot\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_E} = \frac{-\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{z}_{21}\cdot \underline{Z}_2}{(\underline{z}_{22} + \underline{Z}_2)\cdot \underline{Z}_E} \quad \text{Ec. 4-37}$$

Finalmente con el valor de $\underline{Z}_E$ en la Ec. 4-25

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\underline{z}_{21}\cdot \underline{Z}_2}{\underline{z}_{11}(\underline{z}_{22} + \underline{Z}_2) - \underline{z}_{12}\cdot \underline{z}_{21}} \quad \text{Ec. 4-38}$$

El lector curioso podría determinar la *"ganancia"* entre la tensión de salida y la de la fuente de tensión.

4.6 Resumen

En la Tabla 4-8 se presentan las características particulares según la versión de cuadripolo y en la Tabla 4-9 se resume las equivalencias entre los parámetros de cada versión.

Tabla 4-8: Características particulares de los cuadripolos

Cuadripolos recíprocos			Cuadripolos recíprocos simétricos		
$\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21}$ $\underline{y}_{12} = \underline{y}_{21}$	$\lVert[\underline{a}]\rVert = 1$ $\lVert[\underline{b}]\rVert = 1$	$\underline{h}_{12} = -\underline{h}_{21}$ $\underline{g}_{12} = -\underline{g}_{21}$	$\underline{z}_{11} = \underline{z}_{22}$ $\underline{y}_{11} = \underline{y}_{22}$	$\underline{a}_{11} = \underline{a}_{22}$ $\underline{b}_{11} = \underline{b}_{22}$	$\lVert[\underline{h}]\rVert = 1$ $\lVert[\underline{g}]\rVert = 1$

Tabla 4-9: Equivalencia entre parámetros

	z		y		a		b		h		g			
z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\|[y]\|}$	$\frac{-y_{12}}{\|[y]\|}$	$\frac{a_{11}}{a_{21}}$	$\frac{\|[a]\|}{a_{21}}$	$\frac{b_{22}}{b_{21}}$	$\frac{1}{b_{21}}$	$\frac{\|[h]\|}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$\frac{-g_{12}}{g_{11}}$	$\left.\frac{U_1}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	$\left.\frac{U_1}{I_2}\right\|_{I_1=0}$
	z_{21}	z_{22}	$\frac{-y_{21}}{\|[y]\|}$	$\frac{y_{11}}{\|[y]\|}$	$\frac{1}{a_{21}}$	$\frac{a_{22}}{a_{21}}$	$\frac{\|[b]\|}{b_{21}}$	$\frac{b_{11}}{b_{21}}$	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\|[g]\|}{g_{11}}$	$\left.\frac{U_2}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	$\left.\frac{U_2}{I_2}\right\|_{I_1=0}$
y	$\frac{z_{22}}{\|[z]\|}$	$\frac{-z_{12}}{\|[z]\|}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{a_{22}}{a_{12}}$	$\frac{-\|[a]\|}{a_{12}}$	$\frac{b_{11}}{b_{12}}$	$\frac{1}{-b_{12}}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\|[g]\|}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\left.\frac{I_1}{U_1}\right\|_{U_2=0}$	$\left.\frac{I_1}{U_2}\right\|_{U_1=0}$
	$\frac{-z_{21}}{\|[z]\|}$	$\frac{z_{11}}{\|[z]\|}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{-1}{a_{12}}$	$\frac{a_{11}}{a_{12}}$	$\frac{-\|[b]\|}{b_{12}}$	$\frac{b_{22}}{b_{12}}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\|[h]\|}{h_{11}}$	$\frac{-g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$\left.\frac{I_2}{U_1}\right\|_{U_2=0}$	$\left.\frac{I_2}{U_2}\right\|_{U_1=0}$
a	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\|[z]\|}{z_{21}}$	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	a_{11}	a_{12}	$\frac{b_{22}}{\|[b]\|}$	$\frac{b_{12}}{\|[b]\|}$	$\frac{\|[h]\|}{-h_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	$\left.\frac{U_1}{U_2}\right\|_{I_2=0}$	$\left.\frac{U_1}{-I_2}\right\|_{U_2=0}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{\|[y]\|}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	a_{21}	a_{22}	$\frac{b_{21}}{\|[b]\|}$	$\frac{b_{11}}{\|[b]\|}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\|[g]\|}{g_{21}}$	$\left.\frac{I_1}{U_2}\right\|_{I_2=0}$	$\left.\frac{I_1}{-I_2}\right\|_{U_2=0}$
b	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\|[z]\|}{z_{12}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{12}}$	$\frac{-1}{y_{12}}$	$\frac{a_{22}}{\|[a]\|}$	$\frac{a_{12}}{\|[a]\|}$	b_{11}	b_{12}	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$\frac{\|[g]\|}{-g_{12}}$	$\frac{-g_{22}}{g_{12}}$	$\left.\frac{U_2}{U_1}\right\|_{I_1=0}$	$\left.\frac{U_2}{-I_1}\right\|_{U_1=0}$
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$\frac{\|[y]\|}{-y_{12}}$	$\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{a_{21}}{\|[a]\|}$	$\frac{a_{11}}{\|[a]\|}$	b_{21}	b_{22}	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\|[h]\|}{h_{12}}$	$\frac{-g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\left.\frac{I_2}{U_1}\right\|_{I_1=0}$	$\left.\frac{I_2}{-I_1}\right\|_{U_1=0}$
h	$\frac{\|[z]\|}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{a_{12}}{a_{22}}$	$\frac{\|[a]\|}{a_{22}}$	$\frac{b_{12}}{b_{11}}$	$\frac{1}{b_{-11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\|[g]\|}$	$\frac{-g_{12}}{\|[g]\|}$	$\left.\frac{U_1}{I_1}\right\|_{U_2=0}$	$\left.\frac{U_1}{U_2}\right\|_{I_1=0}$
	$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\|[y]\|}{y_{11}}$	$\frac{-1}{a_{22}}$	$\frac{a_{21}}{a_{22}}$	$\frac{-\|[b]\|}{b_{11}}$	$\frac{b_{21}}{b_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-g_{21}}{\|[g]\|}$	$\frac{g_{11}}{\|[g]\|}$	$\left.\frac{I_2}{I_1}\right\|_{U_2=0}$	$\left.\frac{I_2}{U_2}\right\|_{I_1=0}$
g	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{-z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\|[y]\|}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	$\frac{\|[a]\|}{-a_{11}}$	$\frac{b_{21}}{b_{22}}$	$\frac{-1}{b_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\|[h]\|}$	$\frac{-h_{12}}{\|[h]\|}$	g_{11}	g_{12}	$\left.\frac{I_1}{U_1}\right\|_{I_2=0}$	$\left.\frac{I_1}{I_2}\right\|_{U_1=0}$
	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\|[z]\|}{z_{11}}$	$\frac{-y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{\|[b]\|}{b_{22}}$	$\frac{b_{12}}{b_{22}}$	$\frac{-h_{21}}{\|[h]\|}$	$\frac{h_{11}}{\|[h]\|}$	g_{21}	g_{22}	$\left.\frac{U_2}{U_1}\right\|_{I_2=0}$	$\left.\frac{U_2}{I_2}\right\|_{U_1=0}$

4.7 Referencias bibliográficas

[1] Circuitos Eléctricos - Parte I. M. Deorsola, P. Morcelle. Libros de Cátedra. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata.

CAPÍTULO 5
Circuitos con tensiones y corrientes Poliarmónicas

Muchas formas de onda eléctricas son periódicas, pero no senoidales. En particular, luego del surgimiento de la electrónica y sus aplicaciones en las instalaciones a mediados del siglo XX, este tipo de ondas comenzaron a aparecer en los circuitos y en las redes con mayor asiduidad.

Por otra parte, hay fundadas razones para la atención especial que se le ha estado dando a lo largo de todo este texto a las ondas senoidales. En efecto, una onda periódica cualquiera sea su forma, puede analizarse como una suma de ondas senoidales de diferente frecuencia si se cumplen las condiciones necesarias de convergencia, pudiendo ser representadas por lo que se conoce como *serie de Fourier*.

En este capítulo se analiza cuáles son las razones que pueden dar lugar a la aparición de ondas periódicas no senoidales o *poliarmónicas* en circuitos. Se describe brevemente la construcción matemática de señales no senoidales mediante la serie de Fourier y cómo se obtiene su valor eficaz. Se presenta la metodología de análisis de circuitos eléctricos con este tipo de señales utilizando superposición. Finalmente se realiza un estudio de la potencia a partir de distintas teorías entre las cuales sobresalen los enfoques de Budeanu y Fryze.

5.1 Introducción

En la sección 2.2 de [1] (página 18) se presentaron las características de transferencia de los elementos pasivos teóricos indicándose su carácter lineal.

En la práctica, los componentes reales, ante el aumento progresivo del valor de la causa no responden proporcionalmente con la consecuencia. Desde el enfoque de la curva de transferencia la pendiente de esta última tiende a hacerse nula con el aumento comentado. En otras palabras el comportamiento amplio se hace alineal.

Por ejemplo, en un inductor, la característica $\Phi = f(I)$ se puede apartar de la linealidad como muestra la Figura 5-1 (curva llena respecto de la punteada).

Si así es el caso, $\frac{d\Phi}{dI}$ que define la inductancia L del inductor, tiene valor alto y aproximadamente constante mientras la corriente no supere $1\,\mathrm{A}$ y disminuye si aumenta el valor de la amplitud de la corriente.

¿Qué sucede si se aplica al inductor presentado una tensión senoidal sin restricciones en su valor máximo? La respuesta requiere como primer paso plantear la relación inversa de la característica con el resultado de la Figura 5-2.

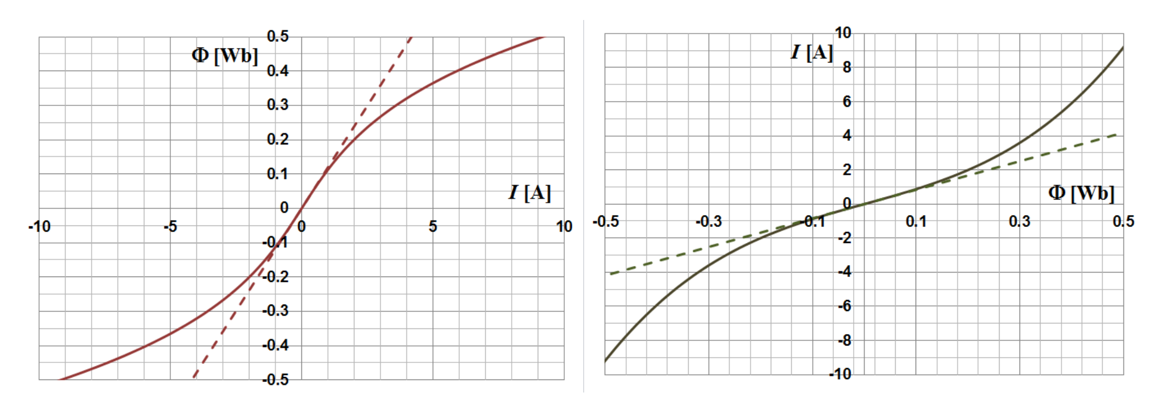


Figura 5-1: flujo magnético función de la corriente **Figura 5-2:** corriente función del flujo magnético

La curva llena de la Figura 5-2 puede aproximarse con un polinomio de exponentes impares (el solo exponente 1 daría el caso lineal). La Ec. 5-1, con $a = 8{,}375$ ($[a] = \mathrm{H}^{-1}$) y $b = 40$ ($[b] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{Wb}^{-3}$) es una adecuada aproximación[33]. Para valores por debajo de $\Phi = 100\,\mathrm{mWb}$ se considera la curva lineal y resulta $L = a^{-1}$.

$$I = a \cdot \Phi + b \cdot \Phi^3 \qquad \text{Ec. 5-1}$$

Con esta expresión matemática puede procederse en forma analítica en lo que sigue.

[33] Es honesto aclarar que la representación para ilustrar el tema se fijó al revés.

Si a este inductor alineal se aplica una tensión senoidal $u(t) = U_{máx}\, cos(\omega t)$, dado que $\phi(t) = \int_0^t u(t)$ resulta $\phi(t) = \Phi_{máx} \cdot sen(\omega t)$. Este flujo magnético debe establecerse en el inductor para sustentar la tensión aplicada siendo $\Phi_{máx} = U_{máx}/\omega$.[34]

Reemplazando $\phi(t)$ en la Ec. 5-1 se obtiene la corriente que causa dicho flujo magnético $i(t) = a \cdot \phi(t) + b \cdot \phi^3(t)$.

Así resulta:

$$i(t) = a \cdot \Phi_{máx} \cdot sen(\omega t) + b \cdot \Phi_{máx}^3 \cdot sen^3(\omega t) \qquad \text{Ec. 5-2}$$

Para $U_{máx} = 150\ \mathrm{V}$ resulta $\Phi_{máx} = 477\ \mathrm{mWb}$ y con estos valores los resultados gráficos son los que se muestran en la Figura 5-3. Se agrega también la corriente que hubiera resultado, si para toda la excursión de la tensión y por ende del flujo magnético la relación de transferencia fuera lineal. El lector puede comprobar a partir del valor de $L = a^{-1}$, que dicha corriente es $i_{lineal}(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t)$ con $I_{máx} = 4\ \mathrm{A}$.

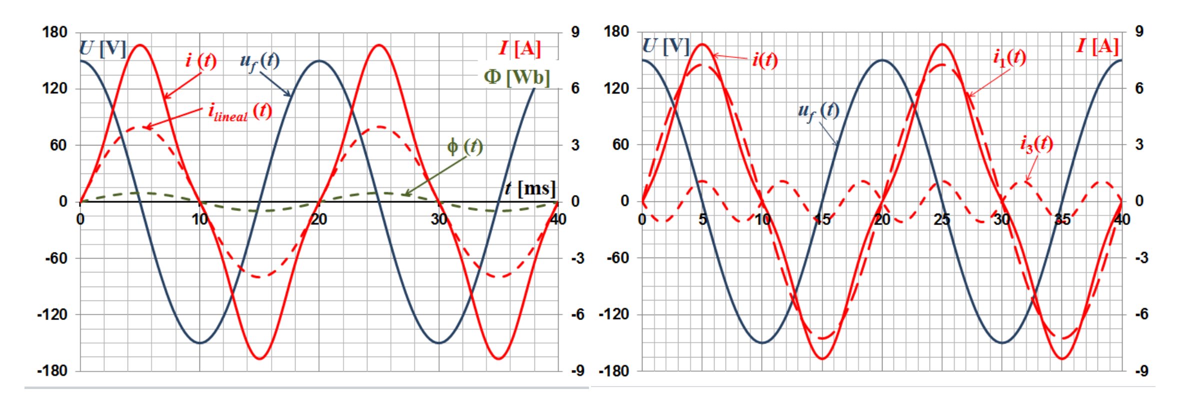


Figura 5-3: tensión, flujo y corriente (Ec. 5-2) **Figura 5-4:** tensión y corriente poliarmónica

Puede apreciarse que la $i(t)$ se aparta de la forma senoidal propia de la respuesta ante excitación de ese tipo vista en el Capítulo 2 de [1]. O lo que es lo mismo decir que la corriente resulta ***"deformada"***.

Como puede demostrarse que $sen(\omega t)^3 = \dfrac{3 \cdot sen(\omega t) - sen(3\omega t)}{4}$, operando en la Ec. 5-2, resulta $i(t) = \left(a \cdot \Phi_{máx} + \dfrac{3}{4} \cdot b \cdot \Phi_{máx}^3\right) \cdot sen(\omega t) - \dfrac{1}{4} \cdot b \cdot \Phi_{máx}^3 \cdot sen(3\omega t)$.

Y escrito en forma genérica, siendo $I_{1máx} = 7{,}26\ \mathrm{A}$ e $I_{3máx} = 1{,}09\ \mathrm{A}$:

$$i(t) = I_{1máx} \cdot sen(\omega t) - I_{3máx} \cdot sen(3\omega t)\ \mathrm{A} \qquad \text{Ec. 5-3}$$

---

[34] Con $U_{máx} = 50\ \mathrm{V}$ queda en zona lineal

La Figura 5-4, arriba junto a la Figura 5-3, representa la misma $i(t)$ pero como indica la Ec. 5-3 o sea suma de dos componentes senoidales (curvas punteadas no ***"deformadas"***) de distinta pulsación. La pulsación de la componente con amplitud $I_{1máx}$ es la misma de que la de la tensión causa, mientras que la que resulta restando varía 3 veces más rápido.

Refiriendo la pulsación igual a la de la causa como como ***fundamental*** o **1º** ***armónico,*** la de la otra componente es **3º** ***armónico***. O en otras palabras la $i(t)$ resulta ser una señal ***poliarmónica***. Este tipo de señales son ***periódicas no senoidales***, recordando que la característica de una sinusoide es que su valor medio en un periodo es nulo.

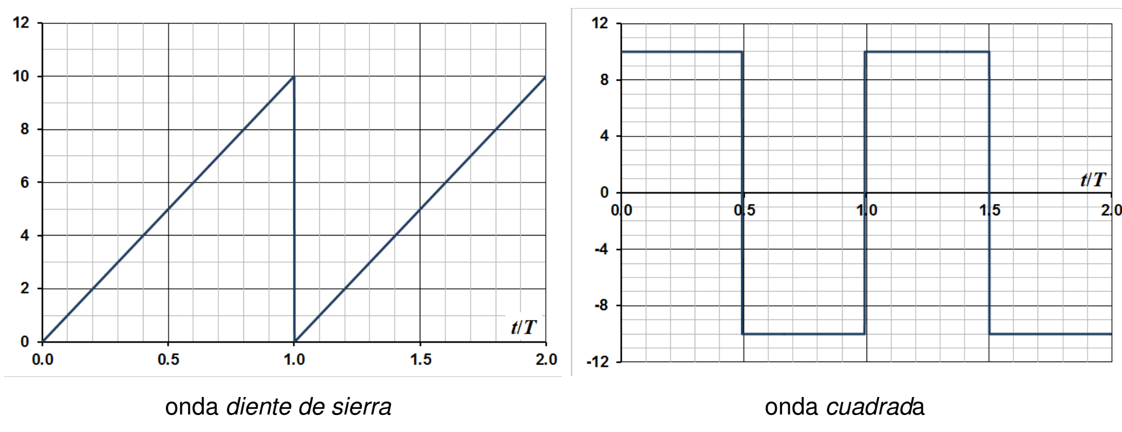
Un ejemplo de este tipo de señales es el caso de la potencia instantánea estudiada en el Capítulo 1. La expresión de $p(t)$ resulta una señal periódica compuesta por una sola senoide de pulsación doble de las causas que la determinan (**2º** ***armónico***) sumada a $\overline{p(t)}$, que en los casos que este valor medio sea no nulo agrega además el no cumplimiento propio de este parámetro para la señales senoidales.

En los dos casos vistos la causa es senoidal pura fijando su pulsación el valor del 1º *armónico*, apareciendo en la consecuencia la señal ***poliarmónica.***

Siendo la consecuencia una corriente, como se verá más adelante, esta produce tensiones *poliarmónicas* en las impedancias internas de las fuentes de tensión o en las de las líneas de conexionado, haciendo que también existan causas también *poliarmónicas*.

La electricidad de alta potencia (por ejemplo hornos eléctricos para fundir metales) o ya la electrónica para el control de potencia (se verá en el Capítulo 6) producen importantes corrientes *poliarmónicas* en las redes de distribución eléctrica (las trifásicas del Capítulo 3) dando tensiones de alimentación con no deseables pero existentes *armónicas*

También la electrónica, en su aporte al manejo de la información por ejemplo, entre otras ha generado señales periódicas como las ondas *"diente de sierra"* o *"cuadrada"* que se muestran en la Figura 5-5. A partir de los gráficos de esta Figura el tiempo esta normalizado respecto del periodo de las ondas que se muestran por lo tanto válidos para cualquier ω.



onda *diente de sierra* onda *cuadrada*

Figura 5-5: Formas de onda periódicas no sinusoidales

Salta a la vista que ambas señales anteriores están lejos de tener forma senoidal, sí que son periódicas y en el caso de la señal de la izquierda tiene valor medio no nulo.

Conclusión: a propósito o no se está ahora en conocimiento que en el análisis de los circuitos eléctricos puede haber señales periódicas no senoidales.

Si queda duda que dichas señales pueden conformarse como señales *poliarmónicas*. *Fourier*[35] demostró que las mismas pueden expresarse como una sumatoria infinita de funciones sinusoidales con frecuencias, fases y amplitudes calculables. La justificación matemática de la serie de Fourier y las fórmulas de cálculo se presenta en el Apéndice B.

Si con $k = 0, 1, 2, 3, ..., etc.$ se indica el orden de la armónica, una señal poliarmónica resulta por la serie de Fourier como $\sum_k^{\infty} a_k \, cos(k\omega t) + \sum_k^{\infty} b_k seno(k\omega t)$.

Si $k = 0$, el 1º término de la 2ª sumatoria es nulo por ser $seno(0) = 0$ y dado que $cos(0) = 1$, el 1º término de la serie es a_0 o sea la continua correspondiente al valor medio que tuviera la señal.

Para $k \neq 0$, los a_k y b_k pueden obtenerse en función de k y reemplazarse en la suma anterior para su uso analítico.

El lector puede verificar mediante el Apéndice B que para las ondas de la Figura 5-5 con amplitud $A = 10$, resultan para cada una de ellas las expresiones de la series de Fourier de la Tabla 5-1, con las particularidades indicadas en la columna de observaciones.

Tabla 5-1: Expresiones de la serie de Fourier

Onda	Formula	Observaciones
Diente de sierra	$a_0 + \sum_k^{\infty} b_k sen(k\omega t) = \frac{A}{2} - \sum_k^{\infty} \frac{A}{\pi k} sen(k\omega t)$	Los a_k son nulos salvo el ya explicado que da el valor de continua. La serie de senos tiene todos los términos negativos.
Cuadrada	$\sum_k^{\infty} b_k sen(k\omega t) = \sum_k^{\infty} \frac{4A}{\pi k} \cdot \frac{1-(-1)^k}{2} sen(k\omega t)$	Los a_k también son nulos al igual que la continua. La serie de senos tiene los términos pares nulos.

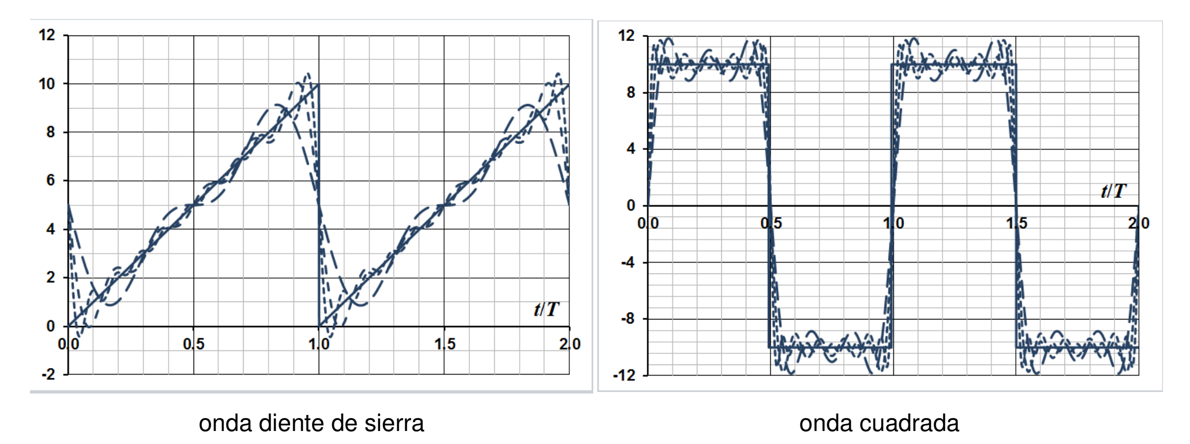
Los dos ejemplos corresponden a funciones impares por lo que las respectivas sumatorias son solo de senos (ver Apéndice B). La onda cuadrada es una muestra que no siempre tiene por qué estar todos los términos armónicos.

La Figura 5-6 muestra tres aproximaciones de cada una de las ondas para $k = 20, 10$ y 5. Para la onda cuadrada $k = 19, 9$ y 5 y en rigor de verdad solo $10, 5$ y 3 por ser los términos pares nulos

[35] ***Jean-Baptiste Joseph Fourier*** (1768-1830). Matemático, físico e historiador francés, alumno de Joseph-Louis Lagrange.

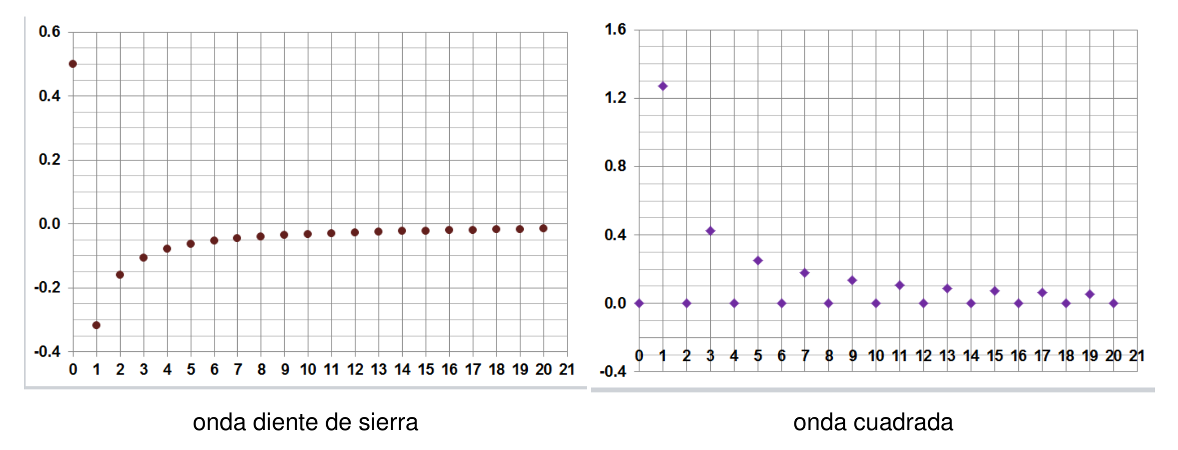
A su vez la Figura 5-7 muestra, en un pseudo grafico de barras (los marcadores indican el tope de la barra) los valores de los respectivos $b_k = f(k)$ para amplitud unitaria. En el caso del grafico de la izquierda la marca par $k = 0$ corresponde a a_0 (valor medio).

Estos gráficos se denominan *espectro de frecuencia de las armónicas* y además del uso de sus valores dan la información rápida su tendencia a cero que tienen los términos de cualquier onda poliarmónica.



onda diente de sierra   onda cuadrada

Figura 5-6: Series de Fourier componiendo las ondas de la Figura 5-5



onda diente de sierra   onda cuadrada

Figura 5-7: Espectro de frecuencia de las armónicas de la Figura 5-6

Se verá a continuación como se analiza el comportamiento de circuitos lineales excitados por señales poliarmónicas y en la sección 5-3 si hay componentes pasivos alinéales

5.2 Resolución de circuitos lineales excitados con señales poliarmónicas. Impedancia o admitancia de cada componente

En la sección anterior se vio que es posible representar señales de tensión o corriente periódicas no senoidales mediante el uso de la serie de Fourier. Utilizando esta posibilidad ca-

da uno de los términos de la serie representativa de esas señales puede considerarse, por ejemplo para una $u_f(t)$ poliarmónica como el equivalente compuesta por varias fuentes de tensión en serie con pulsaciones múltiplo de la fundamental ω_1 de la señal original (Figura 5-8, izquierda). El caso dual de $i_f(t)$ es con fuentes de corriente de cada componente armónicas conectadas en paralelo (Figura 5-8, derecha).

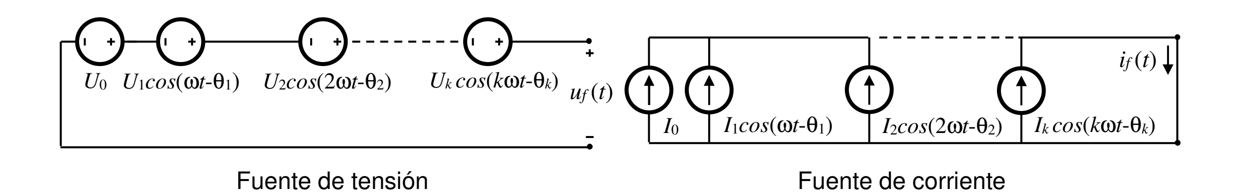


Figura 5-8: Fuentes poliarmónicas representadas por sus componentes en frecuencia

Al aplicar una fuente de tensión poliarmónica (Figura 5-8, izquierda) a un dipolo pasivo lineal se generará, casi siempre, una corriente también poliarmónica.

El análisis de este tipo de circuitos se lleva acabo aplicando *superposición*, por la característica considerada del dipolo. Se calcula la corriente debido a cada una de las componentes de tensión por separado y luego se suman para obtener la corriente total del circuito.

Para ello es necesario calcular la impedancia del dipolo para cada uno de los armónicos de la frecuencia fundamental y luego operar como en el análisis de régimen permanente sinusoidal.

Para el caso de alimentar un dipolo pasivo lineal con una fuente de corriente poliarmónica (Figura 5-8 derecha), calculando la admitancia del dipolo para cada una de las armónicas de la señal, luego las tensiones debido a cada componente y sumando se obtiene la tensión total en el dipolo mencionado. O aplicar dualidad, ya varias veces usada.

En la práctica sólo se toma un número finito de términos la *serie de Fourier* de las señales para realizar el análisis de circuitos con poliarmónicas. Al hacer esto se comete un error en el cálculo de la respuesta, mas este puede ser disminuido agregando más términos a la serie.

Los tres ejemplos siguientes ilustran el procedimiento explicado. Se agrega un cuarto con el resultado del caso de carga alineal. En todos los casos las fuentes de tensión son de variación cosenoidal

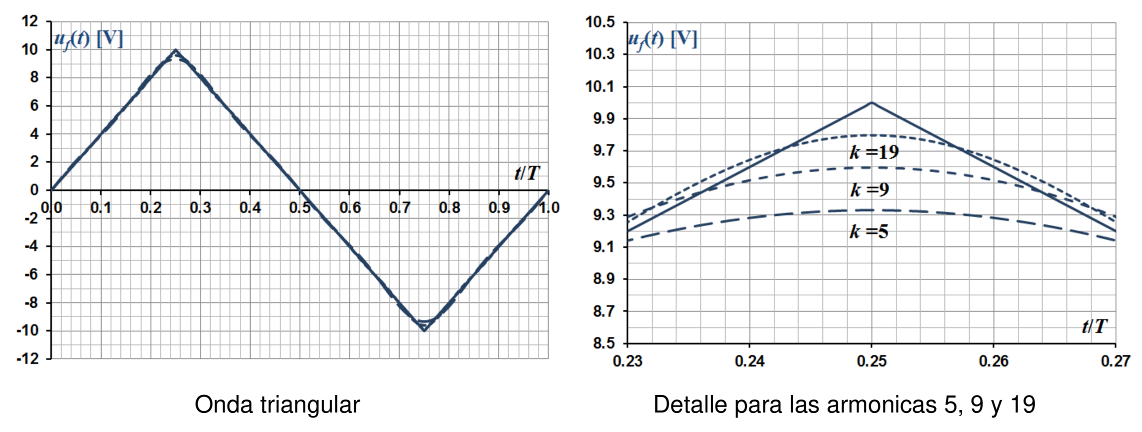
Ejemplo 1; Fuente de tensión de onda triangular con carga capacitiva solamente.

1. La forma de onda de triangular de la fuente de tensión es la que se muestra en trazo continuo en la izquierda de la Figura 5-9. La misma resulta una función impar con amplitud $A_t = 10\,\mathrm{V}$ y se aplica a un capacitor, que para la pulsación definida por el periodo de la misma, resulta con $B_{C_1} = 0{,}5\,\mathrm{S}$.
2. Atendiendo el Apéndice B, por ser impar y valor medio nulo, la onda de dicha fuente de tensión se descompone en la serie de Fourier siguiente:

$$u_f(t)=\sum_k^{\infty}U_{k_{máx}}\,sen(k\omega t)=\sum_k^{\infty}\frac{8A_t}{\pi^2k^2}\cdot\frac{1-(-1)^k}{2}\cdot(-1)^{\frac{k-1}{2}}\,sen(k\omega t) \qquad \text{Ec. 5-4}$$

El análisis de la Ec. 5-4 muestra que los términos para k par son nulos y que para k impar las fuentes están a contrafase en forma alternada o sea cambia el signo de las correspondientes amplitudes.

El grafico de la derecha de la Figura 5-9 se agrega el resultado de representar la señal triangular hasta la armónica 19, 9 y 5 (dado que para las armónicas pares los aportes son nulos, serian 10, 5 y 3 fuentes en serie). Los detalles de los tres casos se aprecian a la derecha, en el zoom de la cresta positiva.



Onda triangular — Detalle para las armonicas 5, 9 y 19

Figura 5-9: Fuente de tensión del Ejemplo 1

3. Para cada fuente de armónico k la susceptancia del capacitor resulta $B_{C_k}=0{,}5k\ \mathrm{S}$ y determina por el mismo una corriente adelantada $\pi/2\ \mathrm{rad}$. Dado que cada tensión es senoidal la corriente será cosenoidal y con una amplitud para cada armónico de $I_{k_{máx}}=U_{k_{máx}}\cdot B_{C_k}=U_{k_{máx}}\cdot k/2$. Se anima al lector a comprobar que entonces la suma de las corrientes de los diferentes armónicos da:

$$i_C(t)=\sum_k^{\infty}I_{k_{máx}}\,cos(k\omega t)=\sum_k^{\infty}\frac{4(A_t/\pi)}{\pi k}\cdot\frac{1-(-1)^k}{2}\cdot(-1)^{\frac{k-1}{2}}\,cos(k\omega t) \qquad \text{Ec. 5-5}$$

4. En la Figura 5-10 están graficadas la Ec. 5-4 (tensión aplicada) y la Ec. 5-5 (corriente resultante) ambas hasta $k=9$ (5 fuentes de tensión) y $k=5$ (3 fuentes de tensión).
   Si el dibujo se hubiera hecho para $k=\infty$ se comprobaría que la corriente es una onda cuadrada cuyos valores máximo y mínimo constantes $(\pm A_t/\pi)$ deben ser $C\cdot du/dt$. En efecto para el $+$: $C\cdot A_t/(T/4)=B_{C_1}/2\pi f\cdot A_t\cdot 4f=A_t/\pi=10/\pi=A_c$

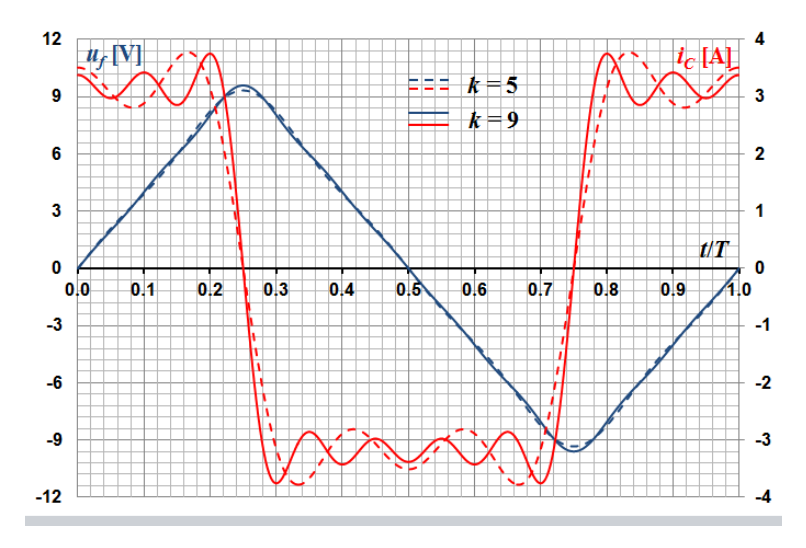


Figura 5-10: Fuente de tensión triangular excitando un capacitor con $B_{C_1} = 0{,}5\,\mathrm{S}$

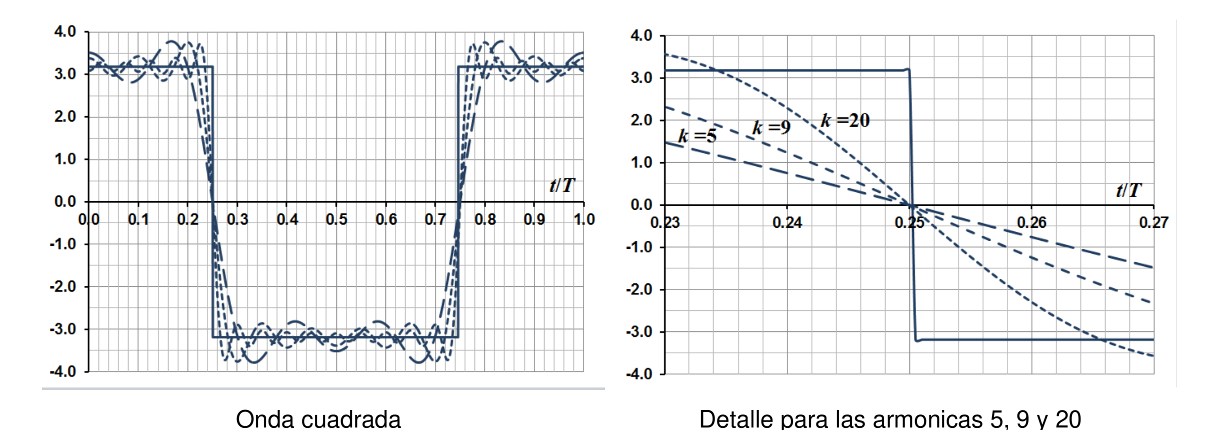
Ejemplo 2: Fuente de tensión de onda cuadrada con carga inductiva solamente.

1. En este caso la forma de onda cuadrada de la fuente de tensión es la de la izquierda de la Figura 5-6 desplazada $T/4$ como se muestra en trazo continuo en la derecha de la Figura 5-11. La misma resulta una función par con amplitud $A_c = 10/\pi\,\mathrm{V}$ y se aplica a un inductor con $X_{L_1} = 0{,}5\,\Omega$ para la pulsación fundamental.
2. Igual que en el ejemplo anterior con el Apéndice B pero en este caso, por ser par y también de valor medio nulo, la onda de la fuente de tensión se descompone en la serie de Fourier siguiente:

$$u_f(t) = \sum_k^{\infty} U_{máx_k} \, cos(k\omega t) = \sum_k^{\infty} \frac{4A_c}{\pi k} \cdot \frac{1-(-1)^k}{2} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}} cos(k\omega t) \qquad \text{Ec. 5-6}$$

El análisis de la Ec. 5-6 también muestra que los términos para k par son nulos y que para k impar las fuentes están a contrafase en forma alternada o sea cambia el signo de las correspondientes amplitudes.

El grafico de la derecha de la Figura 5-11 se agrega el resultado de representar la señal cuadrada hasta la armónica 20, 9 y 5 (dado que para las armónicas pares los aportes son nulos, serian 10, 5 y 3 fuentes en serie). Los detalles de los tres casos se aprecian en el zoom a la derecha en el cruce por cero.



Onda cuadrada | Detalle para las armonicas 5, 9 y 20

Figura 5-11: Fuente de tensión del Ejemplo 2

3. Ahora, para cada fuente de armónico k la susceptancia del inductor resulta $B_{L_k} = 2/k\ \mathrm{S}$ y determina por el mismo una corriente atrasada $\pi/2\ \mathrm{rad}$. Dado que cada tensión es cosenoidal la corriente será senoidal y con una amplitud para cada armónico de $I_{máx_k} = U_{máx_k} \cdot B_{L_k} = U_{máx_k} \cdot 2/k$. También en este caso el lector puede comprobar fácilmente que la suma de las corrientes de los diferentes armónicos da:

$$i_L(t) = \sum_k^{\infty} I_{máx_k}\, sen(k\omega t) = \sum_k^{\infty} \frac{8(A_c \cdot \pi)}{\pi^2 k^2} \cdot \frac{1-(-1)^k}{2} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}}\, sen(k\omega t) \qquad \text{Ec. 5-7}$$

4. Para este caso, en la Figura 5-12 están graficadas la Ec. 5-6 (tensión aplicada) y la Ec. 5-7 (corriente resultante) también ambas hasta $k = 9$ (5 fuentes de tensión) y $k = 5$ (3 fuentes de tensión). Para $k = \infty$ se comprobaría que la corriente es una onda triangular cuyos valores máximo y mínimo $(\pm A_c \cdot \pi)$ deben ser los de $L^{-1} \cdot \int u \cdot dt$. En efecto: $L^{-1} \cdot A_c \cdot (T/4) = B_{L_1} 2\pi f \cdot A_c / 4f = A_c \cdot \pi = 10 = A_t$

5.

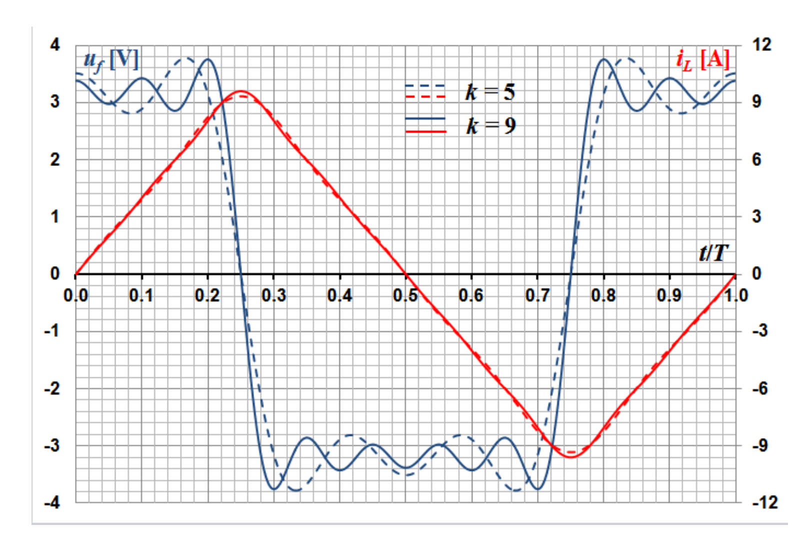


Figura 5-12: Fuente de tensión cuadrada excitando un inductor con $X_{L_1} = 0{,}5\ \Omega$

El resultado es dual del Ejemplo 2 por lo que la Figura 5-12 es igual a la Figura 5-10 pero invertida la relación causa efecto.

Ejemplo 3: Fuente de tensión con dos armónicos con carga inductiva y resistiva en serie

1. Este ejemplo corresponde a la situación ya frecuente en el suministro eléctrico con contenido de armónicas. Para analizar el ejemplo en cuestión es ilustrativa una fuente de tensión $u_f(t) = U_{1_{máx}} \cdot cos(\omega t) + U_{3_{máx}} \cdot cos(3\omega t)\ \mathrm{V}$. Esta fuente excita una carga constituida por un resistor $R = 2\,\Omega$ en serie con un inductor lineal con reactancia para la pulsación fundamental $X_{L_1} = 2\,\Omega$.
2. La ya anticipada linealidad en el punto anterior permite aplicar también superposición. Se deja al lector seguir el correspondiente procedimiento de análisis del circuito y verificar que $i_{RL}(t) = I_{1_{máx}} \cdot cos(\omega t - \theta_1) + I_{3_{máx}} \cdot cos(3\omega t - \theta_3)\ \mathrm{A}$ con los datos que se muestran en la Tabla 5-2.

Tabla 5-2: Datos y resultados del Ejemplo 3

k	$U_{k_{máx}}$	$Z_k = \sqrt{R^2 + kX_{L_1}}$	$I_{k_{máx}} = U_{k_{máx}} / Z_k$	$\theta_k = a\,tan(kX_L/R)$
1	10 V	2,828 Ω	3,536 A	0,785 rad (45,0°)
3	−2 V	6,325 Ω	−0,316 A	1,249 rad (75,56°)

3. La Figura 5-13 muestra la tensión causa y la corriente consecuencia, junto con los mismos parámetros si la fuente solo tuviera la pulsación fundamental a los efectos de comparación.
4. 

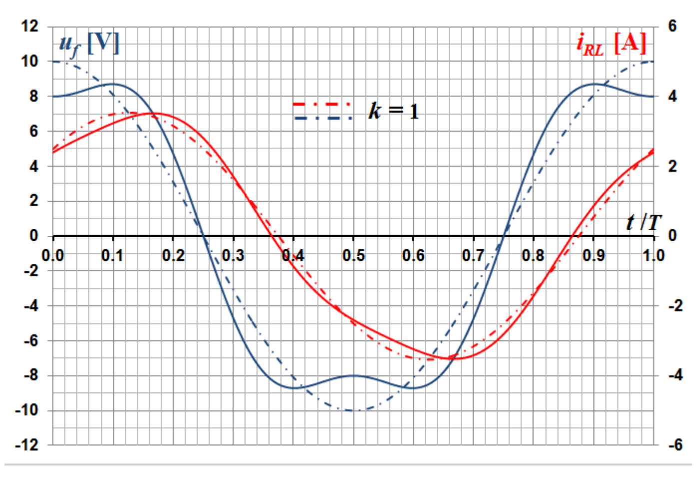


Figura 5-13: Tensión y corriente del Ejemplo 3

Dicha comparación en este ejemplo, pone a la vista que la diferencia de forma es notable en la tensión, pero no tanto en la corriente. La 3ª armónica de la señal causa es 20% de la fundamental y para la consecuencia, dicha relación, es solo 9% debido al

aumento de X_L con la pulsación. Obviamente seria al revés si el elemento reactivo hubiera sido un capacitor. Las Figuras 5-10 y 5-12 ya anticiparon este detalle.

5.3 Resolución de circuitos alinéales excitados con señales poliarmónicas

Ejemplo 4; Fuente de tensión con dos armónicos con carga alineal

El caso sería el del ejemplo anterior, considerando la inductancia con una relación $I(\Phi)$ como la definida y estudiada en la Introducción de este Capítulo. El análisis del circuito requiere la resolución de ecuaciones diferenciales por el *método de diferencias finitas*, tema que escapa al nivel de este texto.

Por tal motivo solo se dará el resultado gráfico final, para el circuito ya descripto en el el punto 1 del Ejemplo 3 respecto a sus valores de tensión y resistencia y $a_L = 0{,}5\,\mathrm{H}^{-1}$ y $b_L = 0{,}05\,\mathrm{AWb}^{-3}$ para definir la relación $I(\Phi)$ alineal ya anticipada. La Figura 5-14 es dicho resultado más la corriente del Ejemplo 3 para poder comparar la diferencia.

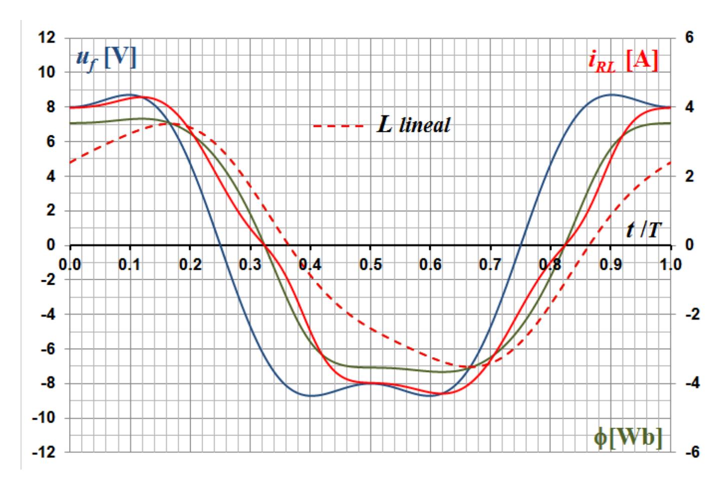


Figura 5-14: Tensión, flujo magnético y corriente del Ejemplo 4 más la corriente del Ejemplo 3

5.4 Valor eficaz de la señal poliarmónica.

En la sección 4.1.3 del Capítulo 4 de [1] se explica que la interpretación física del valor medio cuadrático de una señal periódica es el valor eficaz del parámetro que dicha señal representa, o sea tensión o corriente.

Dado que una señal poliarmónica también es periódica la Ec. 4-6, en la referencia mencionada en el párrafo anterior, es también la fórmula para calcular y determinar el valor eficaz de estas señales representables por la serie de Fourier.

Por ejemplo, para el caso genérico de una tensión $u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{k_{máx}}\cdot cos(k\omega t-\beta_k)$, el primer paso es calcular $u^2(t)$ para luego determinar su valor medio. Es decir hay que determinar el cuadrado del polinomio que representa la serie, cuyo resultado es otro polinomio constituido por la suma de los cuadrados de cada término de la anterior serie más los dobles productos de términos con distinto valor de k.

Luego el valor medio de la suma anterior es la suma de los valores medios de cada término de esa suma. El valor medio de los términos al cuadrado no es otra cosa que el cuadrado del valor eficaz de cada uno. Por otro lado, como los factores de los dobles productos son ortogonales entre sí, sus respectivos valores medio son nulos.

En definitiva el valor eficaz de la tensión presentada se determina con la fórmula de la Ec. 5-8, cuyo formato también vale para una señal de corriente

$$U_{ef}=\sqrt{U_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_{k_{ef}}^2} \qquad \text{Ec. 5-8}$$

Así en general,

el valor eficaz al cuadrado de una señal poliarmónica es igual a la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de las componentes armónicas de la señal más el cuadrado de la componente continua.

Además, dado que cada componente armónica es alterna senoidal y, considerando la otra opción de señal de corriente, se puede verificar fácilmente otro formato para el valor eficaz mostrado en la Ec. 5-9

$$I_{ef}=\sqrt{I_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_{k_{ef}}^2}=\sqrt{I_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_{k_{máx}}^2}{2}} \qquad \text{Ec. 5-9}$$

Esta segunda versión muestra que:

la suma de la mitad de las amplitudes al cuadrado de los componentes armónicos, más el posible valor medio de la señal también al cuadrado es el valor eficaz de la poliarmónica al cuadrado

En conocimiento de cómo se determina el valor eficaz de una señal poliarmónica, en particular en la forma indicada en el recuadro anterior, se puede ahora estudiar la potencia eléctrica cuando están involucradas ese tipo de señales.

5.5 Potencia en circuitos con señales poliarmónicas

Teniendo presente que, independientemente de la forma de variación en el tiempo, tanto de la $u(t)$ que excita el dipolo pasivo (sea lineal o alineal) como la $i(t)$ resultante (o viceversa), siempre $p(t)=u(t)\cdot i(t)$.

A continuación se analiza como resulta el anterior producto para ambos parámetros dados por señales poliarmónicas como las indicadas en la Ec. 5-10 (igual a la expresión usada para determinar el valor eficaz en la sección precedente) y la Ec. 5-11 (para este caso se utiliza n para indicar el orden del armónico para mas claridad en lo que sigue).

$$u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{k_{máx}}\cdot cos(k\omega t-\beta_k) \qquad \text{Ec. 5-10}$$

$$i(t)=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}I_{n_{máx}}\cdot cos(n\omega t-\beta_n-\phi_n) \qquad \text{Ec. 5-11}$$

Para conocer $p(t)$ debe realizarse el producto de los dos polinomios representantes de cada una de las serie anteriores con los siguientes resultados parciales analizados a continuación.

1. **Producto de $U_0\cdot I_0$**

   Dicho producto no es otro que $P_0=U_0\cdot I_0$

2. **Productos de términos con $k=n$**

   Cada uno de estos productos se analiza cómo el caso monofásico visto en el Capítulo 1, pero más general dado que la tensión causa tiene un ángulo $\beta_{k=n}$ La igualdad del orden de armónicos permite identificar dicho orden solo con la ya usada k.

   Entonces, cualquier término k de la Ec. 5-10 es $u_k(t)=a_{u_k}cos(k\omega t)+b_{u_k}sen(k\omega t)$ o de la Ec. 5-11 es $i_k(t)=a_{i_k}cos(k\omega t)+b_{i_k}sen(k\omega t)$, refiriéndose los subíndices $_u$ e $_i$ a los coeficiente de la serie de Fourier de la tensión o la corriente[36]

   Así resulta:

$$p_k(t)=u_k(t)\cdot i_k(t)=\left(a_{u_k}cos(k\omega t)+b_{u_k}sen(k\omega t)\right)\cdot\left(a_{i_k}cos(k\omega t)+b_{i_k}sen(k\omega t)\right) \qquad \text{Ec. 5-12}$$

Desarrollando sucesivamente la anterior expresión se obtiene:

$$p_k(t)=a_{u_k}a_{i_k}cos^2(k\omega t)+b_{u_k}b_{i_k}sen^2(k\omega t)+\left(a_{u_k}b_{i_k}+a_{i_k}b_{u_k}\right)sen(k\omega t)cos(k\omega t)$$
$$p_k(t)=\frac{1}{2}\left[a_{u_k}a_{i_k}+b_{u_k}b_{i_k}+\left(a_{u_k}a_{i_k}-b_{u_k}b_{i_k}\right)cos(2k\omega t)+\left(a_{u_k}b_{i_k}+b_{u_k}a_{i_k}\right)sen(2k\omega t)\right] \qquad \text{Ec. 5-13}$$

Del ya mencionado Capítulo 1, desarrollando la Ec. 1-16 teniendo en cuenta β_k resulta:

---

[36] Ver la Ec. B-1 del Apéndice B

$$p_k(t) = \mathrm{P_k} + P_k \cdot cos\left(2\left[k\omega t + \beta_k\right]\right) + Q_k \cdot sen\left(2\left[k\omega t + \beta_k\right]\right)$$

$$\begin{aligned} p_k(t) = \mathrm{P_k} &+ \left[P_k \cdot cos(2\beta_k) + Q_k \cdot sen(2\beta_k)\right] cos(2k\omega t) + \\ &+ \left[-P_k \cdot sen(2\beta_k) + Q_k \cdot cos(2\beta_k)\right] sen(2k\omega t) \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-14}$$

Igualando las últimas versiones de la Ec. 5-13 y de la Ec.5-14 surge:

$$\overline{p_k(t)} = \mathrm{P}_k = \frac{a_{u_k} a_{i_k} + b_{u_k} b_{i_k}}{2} \quad \text{Ec. 5-15}$$

$$\begin{aligned} P_k \cdot cos(2\beta_k) + Q_k \cdot sen(2\beta_k) &= a_{u_k} a_{i_k} - b_{u_k} b_{i_k} \\ -P_k \cdot sen(2\beta_k) + Q_k \cdot cos(2\beta_k) &= a_{u_k} b_{i_k} + b_{u_k} a_{i_k} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-16}$$

Por último, la resolución del sistema de la Ec. 5-16, con los correspondientes desarrollos trigonométricos y luego teniendo en cuenta que $sen(\beta_k) = a_{u_k} / U_{k_{máx}}$, $cos(\beta_k) = b_{u_k} / U_{k_{máx}}$ y $a_{u_k}^2 + b_{u_k}^2 = U_{k_{máx}}^2$ permite obtener:

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{a_{u_k} \cdot a_{i_k} + b_{u_k} \cdot b_{i_k}}{2} \\ Q_k &= \frac{-a_{u_k} \cdot b_{i_k} + b_{u_k} \cdot a_{i_k}}{2} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-17}$$

Todos los P_k que se calculen deben ser positivos, aunque puede que algún término que lo integra resulte negativo. Para los Q_k, y dado el enfoque de causa la tensión, serán negativos si la corriente atrasa (inductivo) y positivos si adelanta (capacitivo).

Cubriendo todos los casos en se cumple $k = n$ resulta finalmente:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{total} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P_k} = P_{total} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_{u_k} \cdot a_{i_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_{u_k} \cdot b_{i_k} \\ Q_{total} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_{u_k} \cdot a_{i_k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_{u_k} \cdot b_{i_k} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-18}$$

Los parámetros P_{total} y Q_{total} de la Ec. 5-18 conforman los lados ortogonales un triángulo de potencia equivalente al estudiado en la sección 1.2.4 del Capítulo 1. Como se verá luego la hipotenusa de ese triángulo será uno de los catetos de otro triangulo cuya hipotenusa si vale $S = U_{ef} \cdot I_{ef}$, siendo los factores, obviamente, los valores eficaces de la tensión aplicada al dipolo y la corriente resultante en el mismo.

3. Productos de términos con $k \neq n$

En este caso un producto genérico, que resta sumar, será el de la Ec. 5-19.

$$p_{k\neq n}(t) = u_k(t) \cdot i_n(t) = \left(a_{u_k} cos(k\omega t) + b_{u_k} sen(k\omega t)\right) \cdot \left(a_{i_n} cos(n\omega t) + b_{i_n} sen(n\omega t)\right) \quad \text{Ec. 5-19}$$

El desarrollo de la anterior expresión dará productos de funciones ortogonales con el seguro resultado de valor medio nulo. Esto significa que la primera expresión de la Ec. 5-18 no tiene ningún aporte.

Tampoco va a cambiar el valor de Q_{total}, valor resultante de la suma de los máximos de las oscilaciones debidas a los productos de las armónicas de igual pulsación pero en cuadratura, que también son ortogonales y en consecuencia con valor medio nulo. Sin embargo, ya se sabe, $Q_{total} \neq 0$, hace que $S_{total} > P_{total}$ debido a que la corriente requerida a la fuente de tensión que la causa resulta mayor debido a la componente reactiva de la misma.

Algo equivalente puede hacerse a partir de la Ec. 5-19 determinando una expresión analítica del tipo de la de Q_{total} de la Ec. 5-18. La fórmula en cuestión permite el cálculo de D_{total}. Con este nuevo parámetro resulta:

$$S_{total}^2 = P_{total}^2 + Q_{total}^2 + D_{total}^2 \qquad \text{Ec. 5-20}$$

La anterior no es otra que la formula del triángulo rectángulo en el espacio de tres dimensiones, siendo D_{total} el cateto faltante anticipado en el último párrafo del punto 3 de esta sección de estudio.

En 1927, *Budeanu*[37] presenta la Ec. 5-20 modificando de la ecuación $S^2 = P^2 + Q^2$ (1ª de la Tabla 1-2) como justificación a una inquietud presentada por *Steinmetz*[38] consecuencia de del estudio del funcionamiento de los rectificadores de mercurio. Dado que la corriente resultaba deformada, la letra D utilizada para identificar este parámetro es casi obvia. Para la unidad de medida al no estar normalizada se propone, por analogía con la de Q usar $[\mathrm{vad}]$.

Sin embargo, sobre el final del siglo XX, muchas publicaciones presentan ejemplos con señales poliarmónicas en que, con corriente consecuencia de igual forma que la tensión causa aunque desfasada, D no es nulo. También habiendo elementos reactivo, Q puede ser cero.

5.6 Factor de Potencia y su compensación

El aumento de S por la existencia de D hace que con tensiones y corrientes poliarmónicas el $FP = \mathrm{P}/S$ pueda ser bastante menor que la unidad. En otras palabras para conseguir que dicho parámetro sea próximo a uno deben tratar de anularse Q y D, recordando que ambos valores provienen de sendas sumas de máximos de oscilaciones de potencia.

Para Q, el aporte al mismo que hace una determinada armónica puede ser fácilmente compensado pero dado el distinto comportamiento de L y C con la pulsación aumentando o disminuyendo (mayor o menor armónico) hace que no puedan compensarse todos los compo-

[37] ***Costantin Budeanu***: (1886 – 1959). Ingeniero Electricista Rumano
[38] ***Charles Proteus Steinmetz***: (1865 – 1923). Matemático e Ingeniero Electricista germano estadounidense.

nentes de la potencia reactiva en cuestión. En realidad puede que un circuito que incluya a los dos componentes reactivos con alguna topología muy particular consiga un mínimo aceptable con costo importante.

El caso de D, cuyo valor original podría cambiar a favor o en contra por el intento de compensación de Q descripto en el párrafo anterior, minimizarlo significa inyectar corrientes alternas de algunas de las pulsaciones armónicas con adecuadas amplitudes que disminuyan el valor de la originalmente presentes. Este procedimiento, a esta altura de la electrónica de potencia, no es difícil pero si también costoso.

En los ejemplos que siguen se analizan los resultados de la compensación del FP, a partir del circuito de la Figura 5-5.

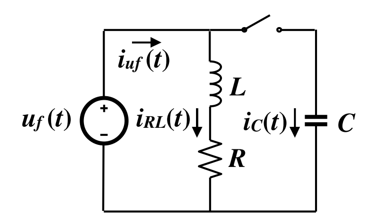


Figura 5-15: Fuente de tensión excitando una carga RL

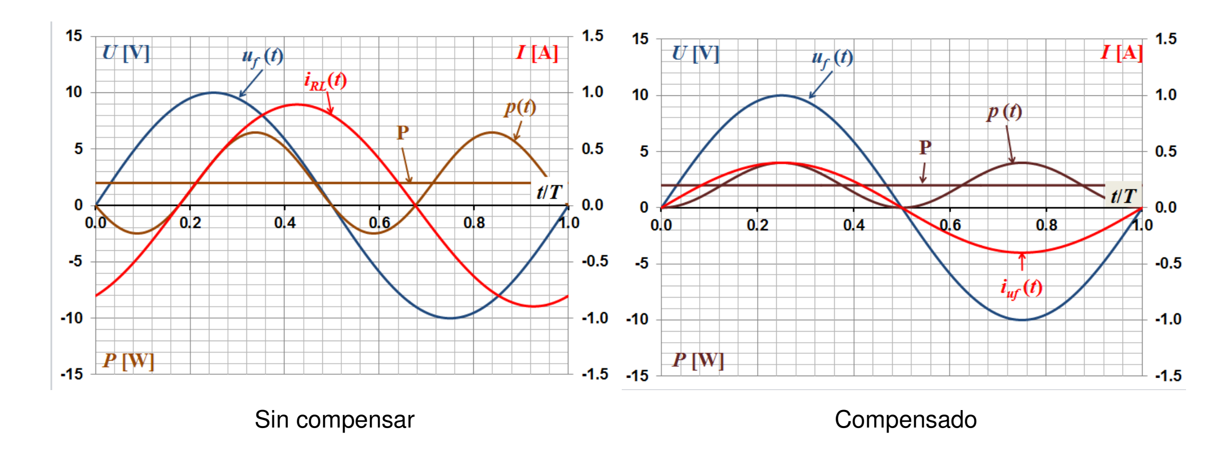
Ejemplo 5: Fuente de tensión sin armónicas con carga RL lineales.

En este caso $u_f(t) = U_{máx} sen(\omega t)$ y los valores de los parámetros son: $U_{máx} = 10\ \mathrm{V}$, $R = 5\ \Omega$ y $X_L = 10\ \Omega$. El cierre de la llave coloca en paralelo un capacitor C para compensar el Factor de Potencia.

El análisis es el típico del circuito monofásico ya estudiado en el Capítulo 1, por lo que el lector puede comprobar que $i_{RL}(t) = I_{máx} sen(\omega t + \phi)$ siendo: $I_{máx} = 0{,}894\ \mathrm{A}$, $\phi = -1{,}107\ \mathrm{rad}$ $S = U_{ef} I_{ef} = 4{,}472\ \mathrm{VA}$, $P = S \cdot cos(\phi) = \mathrm{P} = 2\ \mathrm{W}$, $Q = S \cdot sen(\phi) = -4\ \mathrm{var}$ (obviamente inductivo), y $FP = \mathrm{P}/S = 0{,}447$.

Para conseguir que $FP = 1$ debe ser $B_C = Q/U_{ef}^2 = 80\ \mathrm{mS}$. Considerando, para simplificar, $\omega = 1\ \mathrm{rad/s}$ resulta $C = 80\ \mathrm{mF}$.En esta situación la corriente en la fuente está en fase con la tensión de la misma.

La Figura 5-16 muestra tensión, corriente, potencia instantánea y potencia media sin compensación (izquierda) y con $FP = 1$ (derecha).



Sin compensar — Compensado

Figura 5-16: tensión, corriente y potencia instantánea y media del Ejemplo 5

Si se determinan las componentes de Fourier del caso compensado, los obvios resultados son $b_{u_1}=10\,\text{V}$, $b_{i_1}=0{,}4\,\text{A}$ y $a_{u_1}=a_{i_1}=0$. Con estos datos y las formulas de la Ec. 5-17, se verifica que: $u_f(t)$ e $i_f(t)$ están en fase, $\text{P}=b_{u_1}\cdot b_{i_1}/2=2\,\text{W}$, $\text{Q}=0\,\text{var}$ y lógicamente $\text{P}=S$. Este procedimiento de verificación propuesto valida las formulas usadas inclusive sin armónicas en la tensión y la corriente, independientemente del dipolo y su carácter lineal o no.

Ejemplo 6: Fuente de tensión con armónicas con carga RL lineales.

En este ejemplo la fuente de tensión es $u_f(t)=U_{1_{máx}}sen(\omega t)-U_{3_{máx}}sen(3\omega t)$ con $U_{3_{máx}}=3\,\text{V}$. R y L son los mismo del Ejemplo 5 y la tercera armónica elegida es de un valor importante para hacer notoria su participación.

Los datos de las componentes de Fourier de la tensión causa y la corriente consecuencia sin cambios en el dipolo pasivo se muestran en la primera parte de la Tabla 5-3.

Tabla 5-3: Datos y resultados del Ejemplo 6 sin compensación del FP

k	a_{u_k} [V]	b_{u_k} [V]	a_{i_k} [A]	b_{i_k} [A]	P_k [W]	Q_k [var]			
1	0	10	−0,8	0,4	2,0	−4,0			
3	0	−3	0,097	−0,016	0,024	−0,146			
					P[W]	Q[var]	S[VA]	D[vad]	FP
					2,024	−4,146	4,7	0,897	0,43

Repitiendo el procedimiento usado para la verificación en el Ejemplo 5, con la Ec 11-17 y la Ec. 5-18 se completan los valores de $\text{P}=\text{P}_1+\text{P}_3$ y $Q=Q_1+Q_3$.

Por otro lado, teniendo en cuenta el formato derivado de la Ec 5-9, es $U_{ef}=\sqrt{\left(b_{u_1}^2+b_{u_3}^2\right)/2}$ e $I_{ef}=\sqrt{\left(a_{i_1}^2+b_{i_1}^2+a_{i_3}^2+b_{i_3}^2\right)/2}$ cuyos valores determinan el correspondiente de S, a partir del cual y con la Ec. 5-20 se despeja D. También se puede calcular

$FP = \mathrm{P}/S$. Los resultados numéricos de estos últimos parámetros se muestran en la última parte de la Tabla 5-3.

Por último, como se hizo en el ejemplo anterior con la pretensión de aumentar FP compensando Q es ahora $C = 76\ \mathrm{mF}$. El circuito ahora se comporta dando los resultados de las componentes de tensión y corriente del primer recuadro de la Tabla 5-4 con los que se obtiene los restantes, tal cual se hiciera para completar la Tabla 5-3.

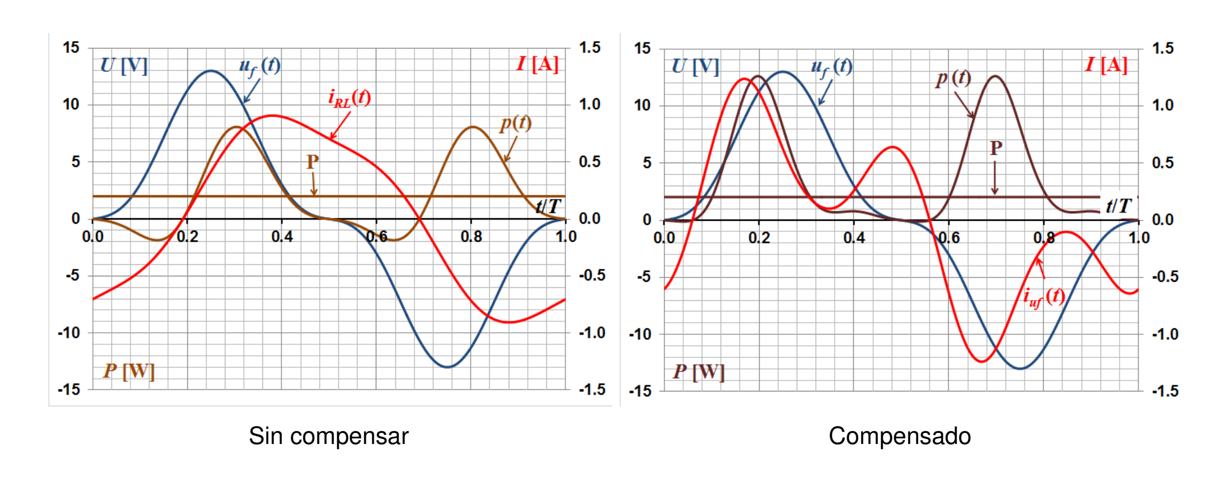
Tabla 5-4: Datos y resultados del Ejemplo 6 compensado con $C = 76\ \mathrm{mF}$

k	a_{u_k} [V]	b_{u_k} [V]	a_{i_k} [A]	b_{i_k} [A]	P_k [W]	Q_k [var]
1	0	10	−0,039	−0,4	2,0	−0,197
3	0	−3	−0,588	−0,019	0,024	0,882

P[W]	Q[var]	S[VA]	D[vad]	FP
2,024	0,685	3,72	2,93	0,544

Salta a la vista que no se consiguió el objetivo de $FP = 1$. Sí disminuyó mucho Q (hasta paso a ser capacitivo por efecto de la 3ª armónica) bajando a su vez el valor de S para dar un aumento de FP. Otro detalle notable es que también aumentó D, detalle que ya se anticipó antes de presentar los Ejemplos.

En la Figura 5-17 se grafican: tensión, corriente, potencia instantánea y potencia media sin compensación (izquierda) y con compensación (derecha).



Sin compensar | Compensado

Figura 5-17: tensión, corriente y potencia instantánea y media del Ejemplo 6

Al no conseguirse la compensación óptima, se aprecia que la corriente por la fuente no es cero cuando la tensión es nula delatando, ya que casi se anula la parte reactiva, un valor mayor de D. A su vez, el valor eficaz de la corriente resultante de la compensación, con manifiesto contenido de 3ª armónica, disminuyó.

Ejemplo 7: Fuente de tensión con armónicas con carga R lineal y L alineal

En el Ejemplo 4 de la sección 5.3 al analizar una situación como la de esta propuesta, se indicó que la determinación de la corriente en el circuito se puede obtener numéricamente mediante el método de diferencias finitas.

Con ese método se calcula el flujo magnético en la inductancia para luego obtener la corriente con la relación $I(\Phi)$ alineal analíticamente aproximada con un polinomio, como se presenta en la Introducción de este Capítulo. Para este caso se considera la anterior transferencia corriente/flujo un polinomio impar de tercer orden con $a_L = 0{,}1\,\mathrm{H}^{-1}$ y $b_L = 0{,}001\,\mathrm{AWb}^{-3}$, con la misma $u_f(t)$ y R del Ejemplo 6.

Conseguidos los valores de la corriente en función del tiempo en un periodo, obtenidos luego los coeficientes de Fourier de dicha corriente por métodos de integración numérica, se dispone de una serie analítica representativa de la misma.

Así, para el asunto en cuestión, resultan los coeficientes indicados en la primera parte de la Tabla 5-5, junto con los repetidos de la tensión causante de esa corriente. Se puede notar que para una mejor aproximación de la corriente es necesario agregar la armónica $k = 5$, siendo las impares superiores siguientes no significativas.

Tabla 5-5: Datos y resultados del Ejemplo 7 sin compensación

k	a_{u_k} [V]	b_{u_k} [V]	a_{i_k} [A]	b_{i_k} [A]	P_k [W]	Q_k [var]			
1	0	10	–0,916	0,72	3,6	–4,58			
3	0	–3	0,24	0,037	–0,057	–0,36			
5	0	0	–0,018	–0,048	0	0			
					P [W]	Q [var]	S [VA]	D [vad]	FP
					3,543	–4,94	6,22	1,31	0,57

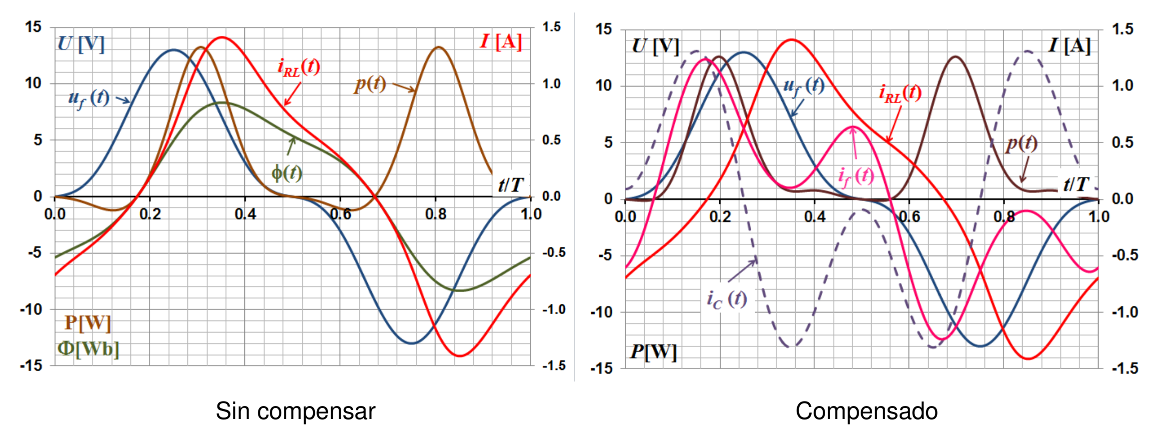
Operando como en el caso no compensado del Ejemplo 6, numéricamente se completa el resto de la Tabla y a partir del valor de Q sale $C = 90\,\mathrm{mF}$ (se sigue considerando pulsación fundamental unitaria para el cálculo del valor de la capacitancia). Con la corriente capacitiva, la corriente en la fuente tiene componentes de *Fourier* y resultados consecuentes indicados en la Tabla 5-6.

Tabla 5-6: Datos y resultados del Ejemplo 7 con compensación

k	a_{u_k} [V]	b_{u_k} [V]	a_{i_k} [A]	b_{i_k} [A]	P_k [W]	Q_k [var]			
1	0	10	–0,0157	0,72	3,6	–0,0785	7,382	0,65	
3	0	–3	–0,57	0,037	–0,057	0,86			
5	0	0	–0,0185	–0,048	0	0			
					P [W]	Q [var]	S [VA]	D [vad]	FP
					3,543	0,7765	4,81	3,16	0,74

En la Figura 5-18 (izquierda) se grafican: tensión, corriente, potencia instantánea y potencia media sin compensación además del flujo magnético determinado numéricamente.

En la Figura 5-18 (derecha), compensado, se aprecian: tensión, corriente en cada rama y su suma, potencia instantánea y potencia media.



Sin compensar Compensado

Figura 5-18: tensión, corriente y potencia instantánea y media del ejemplo 7

Ejemplo 8: Propuesta de *Fryze*[39] para la compensación del Factor de Potencia

En los ejemplos analizados en esta sección hasta el presente la compensación del Factor de Potencia, tratando en principio de minimizar Q, se basa en la propuesta hecha por el ya nombrado *Budeanu* a principios del siglo pasado no habiendo todavía señales poliarmónicas. Como ya se estudió con detalle en el Capítulo 1, anular Q implica anular la componente reactiva de la corriente (ortogonal con la tensión) y por lo tanto quede solo la componente en fase con el consecuente resultado mínimo de circulación de cargas por la fuente de tensión.

Si hay armónicas disminuir Q puede aumentar D (ejemplos 6 y 7, si bien aumenta FP y baja la I_{ef} en la fuente de tensión). Eliminar D implica inyectar adecuados valores de corrientes poliarmónicas.

En 1930, a partir de una propuesta de *Fryze*, la formula $S^2 = P^2 + Q_B^2 + D^2$ (Ec. 5-20) se cambia a $S^2 = P^2 + Q_F^2$. Los subíndices son obvios y están para identificación. También es obvio que $Q_F^2 = Q_B^2 + D^2$.

La propuesta en cuestión ya se esbozó anticipadamente en la sección 1.6.3. La idea es expresar la corriente en la fuente de tensión como suma de una componente en fase con la tensión más la corriente de *Fryze* (por supuesto denominación homenaje).

En la ya mencionada sección se vio que $i_p(t) = i_G(t) = G_{eq} \cdot u_f(t)$, con $G_{eq} = \mathrm{P}/U_{ef}^2$.

En consecuencia:

$$i_F(t) = i_f(t) - i_G(t) \qquad \text{Ec. 5-21}$$

[39] ***Stanislaw Fryze***: (1885 – 1964). Oficial de la Armada e Ingeniero Electricista Polaco

La aplicación de este otro enfoque al Ejemplo 7 se muestra en la Figura 5-19.

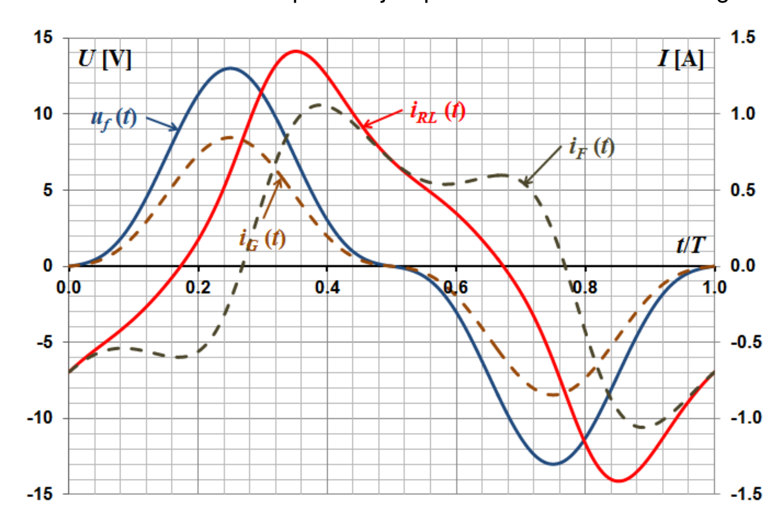


Figura 5-19: tensión y la corriente con sus componentes: en fase con la fuente de tensión y de *Fryze*

La ya vista Figura 1-24 (Capítulo 1) sería la representación para el caso de haber aplicado la propuesta de *Fryze* al Ejemplo 5 en este Capítulo.

Por otro lado en la Tabla 5-7 se consignan, junto a las componentes de *Fourier* de la tensión y la corriente de la fuente de excitación del circuito alineal copiadas de la Tabla 5-5, la de las dos nuevas corrientes.

Tabla 5-7: Componentes de Fourier de la tensión y las corrientes del Ejemplo 8

	$u_f(t)$		$i_f(t)=i_{RL}(t)$		$i_G(t)$		$i_F(t)$	
k	a_{u_k} [V]	b_{u_k} [V]	a_{i_k} [A]	b_{i_k} [A]	a_{i_k} [A]	b_{i_k} [A]	a_{i_k} [A]	b_{i_k} [A]
1	0	10	–0,916	0,72	0	–0,651	–0,916	0,0696
3	0	–3	0,24	0,037	0	0,195	0,24	0,232
5	0	0	–0,018	–0,048	0	0	–0,018	–0,048

Se descuenta que no es sorpresa para el lector los valores nulos en las columnas 5 y 6.

Tampoco es sorpresa que aplicando la primera de las formulas de la ya usada Ec. 5-17 con los componentes de Fourier de $u_f(t)$ e $i_G(t)$ se compruebe $\mathrm{P}=3{,}543\ \mathrm{W}$, o que si los componentes son los de $u_f(t)$ e $i_F(t)$ el resultado es nulo.

Cambiando de signo las componentes de las columnas 7 y 8 se obtiene $-i_F(t)$, que de lograse a un costo aceptable, inyectada al circuito seguro da $FP=1$.

5.7 Referencias bibliográficas

[1] Circuitos Eléctricos - Parte I. M. Deorsola, P. Morcelle. Libros de Cátedra. Editorial de la Universidad de La Plata.

CAPÍTULO 6
Introducción a la electrónica - Rectificación

El presente capítulo introduce el estudio de circuitos que incluyen dispositivos electrónicos, básicamente el *diodo* y el *tiristor*, elementos de la familia de los denominados *rectificadores*.

Conocer los fundamentos físicos del comportamiento y funcionamiento de dichos dispositivos traería aparejado el análisis microscópico de ciertos elementos utilizados en su fabricación (*semiconductores*), combinado con aplicaciones de la física cuántica, lo cual queda fuera del alcance del presente texto. Sólo bastará presentar las características corriente versus tensión en bornes de los elementos y a partir de ello enunciar el comportamiento y la aplicación de las leyes fundamentales de la electrotecnia para el análisis y resolución de circuitos que contengan este tipo de dispositivos.

Básicamente, en este capítulo se estudia cómo convertir una señal *bidireccional* (alterna senoidal), cuyo valor medio es cero, en una señal *unidireccional*, cuyo valor medio es distinto de cero. Esto muchas veces se conoce como *conversión CA/CC* (corriente alterna a corriente continua). Para lograr esta conversión se utiliza el dispositivo denominado *diodo rectificador* formando parte de un circuito llamado *rectificador*, del cual se estudian diversos tipos y su respectivo funcionamiento.

Más aún, a lo largo del capítulo se verá que es posible realizar el *control de la potencia* en una carga mediante la variación del valor medio obtenido, utilizando dispositivos que son variantes del diodo rectificador (*tiristor*), conformando circuitos denominados *rectificadores controlados*.

6.1 Semiconductores

Como se mencionó, no es objeto de este texto realizar el estudio microscópico que explica el funcionamiento detallado de los elementos semiconductores. Existe numerosa y variada bibliografía que trata con diferentes niveles de detalle este estudio.

No obstante, puede decirse que los semiconductores son elementos ubicados en el grupo IV de la tabla periódica, cuyas propiedades se encuentran en una región intermedia entre los materiales conductores y los materiales aislantes.

Los elementos semiconductores típicos más utilizados son el silicio y el germanio.

Se puede apreciar que la denominación *semiconductor* es bastante adecuada observando simplemente los valores de conductividad del cobre (conductor, 0,59 x 10^6 S/cm), vidrio (aislante, 10^{-16} a 10^{-13} S/cm) y silicio (semiconductor, 10^{-8} a 10^{-1} S/cm).

6.2 Diodo

La Figura 6-1 muestra un diodo real y su símbolo eléctrico.

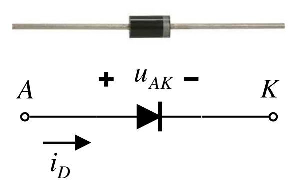


Figura 6-1 Diodo real y símbolo eléctrico

El símbolo eléctrico del diodo permite intuir fácilmente su funcionamiento; tal como se analizará en los párrafos siguientes.

El diodo fue concebido como un dispositivo cuyo comportamiento depende de la polaridad de la tensión entre sus bornes.

Si dicha tensión es positiva en el ánodo respecto del cátodo (u_{AK}), el diodo se comporta como una resistencia de muy bajo valor, idealmente cero. En esta condición se dice que el diodo se encuentra en *polarización directa* y permite la conducción, estableciéndose una corriente denominada *corriente directa*.

En cambio, si la tensión es positiva en el cátodo respecto del ánodo, su comportamiento se asemeja a una resistencia de muy alto valor, idealmente infinito. En esta condición el diodo se encuentra en *polarización inversa*, no permitiendo la conducción. En este caso, en un diodo real, se establece una corriente que se denomina *corriente inversa de saturación*, la cual es prácticamente constante y despreciable frente a la corriente directa.

Si la tensión inversa sigue aumentando, en algún momento se alcanzará un valor suficientemente grande, denominado *tensión de ruptura* U_R, como para provocar la destrucción del diodo.

En la práctica, y partir del estudio detallado del comportamiento del diodo que no se incluye aquí, surge la siguiente expresión, denominada *ecuación del diodo*:

$$i_D = I_0 \left(e^{q \cdot u_{AK} / kT} - 1 \right) \qquad \text{Ec. 6-1}$$

en donde
- i_D: corriente en el diodo
- I_0: corriente inversa de saturación
- q: carga de un electrón
- u_{AK}: tensión sobre el diodo
- k: constante de Boltzmann
- T: temperatura del elemento en [K]

Para tener una idea de las magnitudes, debe tenerse en cuenta que i_D puede ser del orden de 10^{-3} a 10^{2} A, mientras que I_0 puede valer de 10^{-9} a 10^{-15} A.

La Figura 6-2 muestra una representación gráfica muy aproximada de la Ec. 6-1.

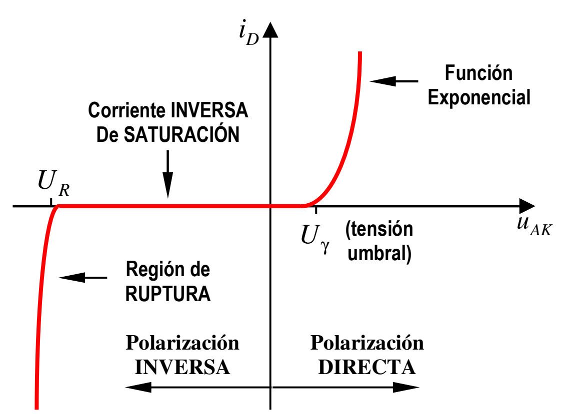


Figura 6-2 Representación de la Ec. 6-1

En la gráfica de la Figura 6-2 pareciera que la corriente inversa de saturación vale cero. En realidad, si la escala de corriente es la misma en ambos semiejes (de polarización directa y de polarización inversa), no sería posible distinguir el valor de I_0 comparado con los valores de corriente directa; pero debe tenerse en cuenta que I_0 existe y es distinta de cero en un diodo real.

Debe observarse también que, en polarización directa, los valores de corriente comienzan a ser apreciables recién cuando la tensión toma valores, también apreciables, por encima de cero. Dicho valor de tensión que se suele denominar *tensión umbral* U_γ depende del tipo de material del que está constituido el diodo; para diodos de germanio, $U_\gamma \approx 0{,}2\,\text{V}$, mientras que, para diodos de silicio, $U_\gamma \approx 0{,}6\,\text{V}$. A partir de la tensión umbral, el crecimiento exponencial de la corriente directa es muy rápido y resulta prácticamente lineal respecto de la tensión.

Respecto del comportamiento con tensión inversa, debe observarse que si se alcanza el valor U_R la gráfica presenta un codo y partir de dicha tensión, hacia valores más negativos, con pequeños incrementos de tensión, la corriente crece abruptamente ingresando en lo que se denomina *zona de ruptura*. Esta zona de la característica es de funcionamiento indeseado, excepto en diodos especiales que están diseñados para funcionar en dicha zona de ruptura, denominados *diodos zener*. El estudio de estos dispositivos queda fuera del alcance de este texto.

Para evitar el uso de la Ec. 6-1 y que las ecuaciones de resolución del circuito resulten muy tediosas, en la mayoría de los casos se pueden realizar aproximaciones utilizando modelos sencillos. Las gráficas de la Figura 6-3 presentan algunas de dichas aproximaciones.

Como se mencionara al inicio de la presente sección, el diodo fue concebido como un dispositivo cuyo funcionamiento depende de la polaridad de la tensión aplicada. En resumidas cuentas, y para un diodo ideal, si el potencial del ánodo es mayor que el del cátodo, el dispositivo permite el paso de la corriente en el sentido $A \rightarrow K$, comportándose como un *cortocircuito* ($u_{AK} = 0$) y el valor la corriente quedará establecido por el funcionamiento del resto del circuito. En cambio, si la polaridad de la tensión aplicada a los bornes del elemento es la opuesta, el diodo se comporta como un *circuito abierto* y el elemento bloqueará el paso de la corriente ($i_D = 0$); su tensión u_{AK} en este caso quedará definida por el funcionamiento del resto del circuito.

Lo descripto en el párrafo anterior queda gráficamente expresado mediante el diagrama de la Figura 6-3a), con lo cual queda representado el *modelo ideal* del diodo.

El modelo de la Figura 6-3b) es similar al de la Figura 6-3a), sólo que tiene en cuenta la tensión umbral, representada en este caso por una fuente de tensión, tal cual se indica.

Como se mencionó más arriba, y observando la Figura 6-1, una vez que se supera la tensión umbral, la corriente directa del diodo crece rápidamente y en forma prácticamente lineal. En base a esto, el modelo aproximado de la Figura 6-3c) pone de manifiesto dicho fenómeno mediante una recta cuya pendiente se puede interpretar como la inversa de una resistencia R_D . Este modelo se completa conectando en serie con la fuente que representa la tensión umbral un resistor de resistencia R_D .

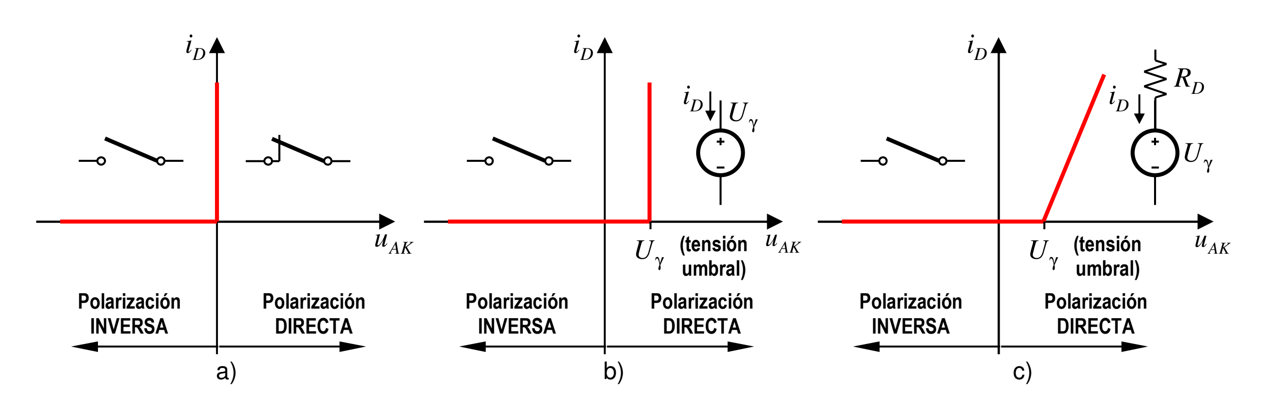


Figura 6-3 Diferentes modelos del diodo según la aproximación a la característica de la Figura 6-1

La elección de tales modelos en el análisis de circuitos dependerá de diversos factores.

Normalmente, cuando se comienza a analizar un circuito cualquiera, siempre es conveniente utilizar el modelo más simple de la Figura 6-3a); esto ayuda a una rápida comprensión del funcionamiento del circuito en cuestión. Estos modelos a menudo se denominan de *gran señal*.

Cuando se requiere una representación más exacta del funcionamiento de un circuito, se utilizan los modelos más complejos (Figuras 6-3b) y 6-3c)), llegando incluso en algunos casos a ser necesario utilizar el modelo representado por la Ec. 6-1 y la Figura 6-2. Estos modelos suelen denominarse de *pequeña señal*, que representan el comportamiento del diodo en detalle, en especial, ante pequeños cambios de tensión y corriente. Para estas situaciones muchas veces resulta conveniente y más adecuado emplear resoluciones gráficas que permitan un resultado aproximado con el objeto de localizar el entorno del punto de funcionamiento del circuito, para luego, por aproximaciones sucesivas, determinar el punto exacto. Esta forma de plantear el análisis escapa a los objetivos de este capítulo; por lo cual, a menos que se indique lo contrario, en este texto se utiliza el modelo de la Figura 6-3a).

6.3 Tiristor

El tiristor es un dispositivo similar al diodo, integrante de la familia de los denominados *SCR* (*Silicon Controlled Rectifier*), pero que posee un tercer terminal (de control) que permite comandar el inicio de la conducción del dispositivo. La Figura 6-4 muestra algunos tiristores reales y la Figura 6-5 presenta el símbolo eléctrico.



Figura 6-4 Diferentes tipos de tiristor

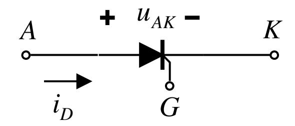


Figura 6-5 Símbolo del tiristor

Según se observa en la Figura 6-5, el símbolo del tiristor es similar al del diodo, sólo que se ha agregado un tercer terminal identificado G, que se denomina *puerta*, *compuerta* o *gate* (de acuerdo a su denominación de origen). Dicha compuerta se utiliza para realizar el control de la conducción del tiristor; es decir que el dispositivo no va a alcanzar

dicho estado hasta que se aplique una señal adecuada en ese terminal, aun cuando la polarización del tiristor sea directa.

La sección siguiente describe en detalle el funcionamiento del tiristor.

6.3.1 Característica corriente vs. tensión del tiristor

La Figura 6-6 presenta la característica corriente versus tensión del tiristor.

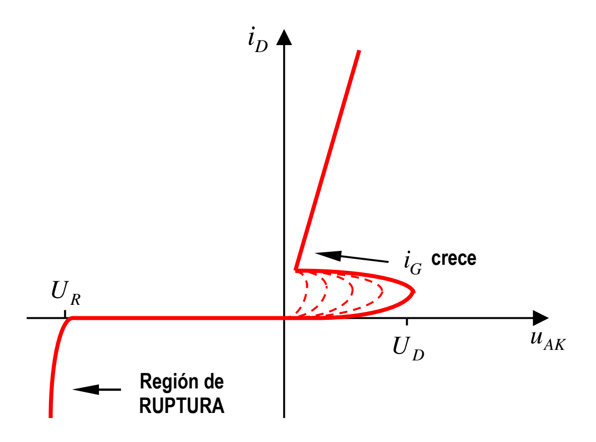


Figura 6-6 Característica I-U del tiristor

Se observa que para polarización inversa el comportamiento es similar al diodo, por lo cual no se va a analizar en detalle el comportamiento en esta condición.

En polarización directa, y si la corriente del terminal G vale $i_G = 0$, el tiristor pasa al estado de conducción una vez que la tensión entre terminales principales u_{AK} alcanza la tensión U_D. Al intentar superar dicha tensión, la característica $I-U$ del dispositivo muestra que la tensión entre terminales $A-K$ desciende bruscamente y si continúa aumentando la tensión, la corriente se incrementará proporcionalmente. La curva muestra que dicha proporcionalidad es tal que su comportamiento es el de una resistencia de muy bajo valor.

Si en cambio, la corriente de compuerta comienza a tomar valores mayores que cero, la conducción o *disparo* del dispositivo se iniciará para valores de u_{AK} menores que U_D. Cuanto mayor sea i_G, menor será la tensión de disparo u_{AK} necesaria para comenzar a conducir; si la corriente de compuerta es suficientemente grande, el inicio de la conducción ocurrirá ni bien el diodo ingresa en polarización directa.

A los fines prácticos, una vez que el tiristor se encuentra en conducción la resistencia del dispositivo se puede considerar nula.

6.4 Conversión CA/CC - Control de potencia

Muchas veces resulta necesario contar con fuentes de tensión continua, en particular cuando se trata de alimentar circuitos o dispositivos electrónicos. En general, las fuentes de

alimentación primaria de tensión provienen de la red de distribución cuya forma de onda es alterna senoidal y su valor medio es nulo.

A pesar de la idea generalizada sobre el tema, una tensión o corriente se puede considerar *continua* si su valor medio es distinto de cero, sin importar su forma. A partir de este concepto es posible obtener tensiones y corrientes continuas a partir de circuitos sencillos con diodo y tiristor. Por lo tanto, con dichos dispositivos, es posible realizar el análisis de una familia de circuitos denominados *conversores de alterna a continua CA/CC*, que son ni más ni menos que circuitos que permiten obtener señales con valor medio distinto de cero a partir de señales con valor medio nulo.

En primera instancia todos los circuitos que se estudian en las secciones 6.5 y 6.6 comprenden sólo aquéllos cuyas cargas con puramente resistivas.

Posteriormente, en la sección 6.7, se extenderá el estudio brevemente a casos con cargas formada por combinaciones de resistor-inductor y resistor-capacitor. En el primer caso el estudio se relaciona con la importancia del control de potencia en máquinas rotantes, las cuales son posibles de modelar mediante sencillos circuitos RL. En el caso de combinación resistor-capacitor se destaca la necesidad de proveer el *filtrado* de las componentes de alta frecuencia, lo que permite obtener tensiones en la carga prácticamente independientes del tiempo.

6.5 Rectificadores

Un circuito rectificador es aquél que permite efectuar la conversión *CA/CC*.

El elemento básico que permite tal conversión es el diodo, estudiado en la sección 6.2. Es posible obtener este resultado mediante diversos circuitos con diferentes configuraciones de dichos elementos.

Más aún, es posible conseguir la variación del valor medio obtenido en la conversión *CA/CC* utilizando tiristores, tema que se estudia en la sección 6.6.

Las secciones que siguen presentan diferentes circuitos que permiten obtener señales continuas (es decir, con valor medio distinto de cero) de diferentes valores y características.

6.5.1 Rectificador monofásico de media onda

El circuito rectificador más simple y que ilustra el comportamiento de un diodo es el *rectificador monofásico de media onda* que se muestra en la Figura 6-7.

Debe observarse que, de aquí en adelante, la tensión del diodo se denominará $u_D(t)$ y los valores de las gráficas que surjan de los estudios corresponderán a circuitos en los cuales

la amplitud de $u_f(t)$ vale 10 V y la resistencia del resistor de carga, 2 Ω. Asimismo, la tensión $u_D(t)$ se dibujará al 95 % de su valor para poder distinguirla de $u_f(t)$.

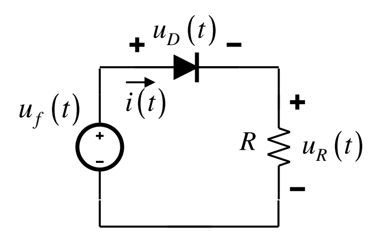


Figura 6-7 Rectificador monofásico de media onda

Teniendo en cuenta lo mencionado respecto de la conversión *CA/CC*, el análisis típico de este circuito implica suponer que la tensión de la fuente $u_f(t)$ es senoidal. Suponiendo además que el diodo es ideal, resulta evidente que ni bien la tensión de la fuente toma valores por encima de cero con la polaridad indicada, el diodo se polariza en directa; por lo tanto el diodo conduce sin restricciones de acuerdo al modelo de Figura 6-3a) y la tensión en el resistor es igual a la de la fuente. Transcurrido el medio ciclo completo, cuando la tensión $u_f(t)$ cruza por cero y comienza a tomar valores negativos, el diodo se polariza en inversa, no permitiendo que se establezca corriente en el circuito, por lo cual $u_R(t)=0$ y $u_D(t)=u_f(t)$ durante todo el semiciclo negativo de la tensión de la fuente. La gráfica de las corrientes y tensiones se muestra en la Figura 6-8.

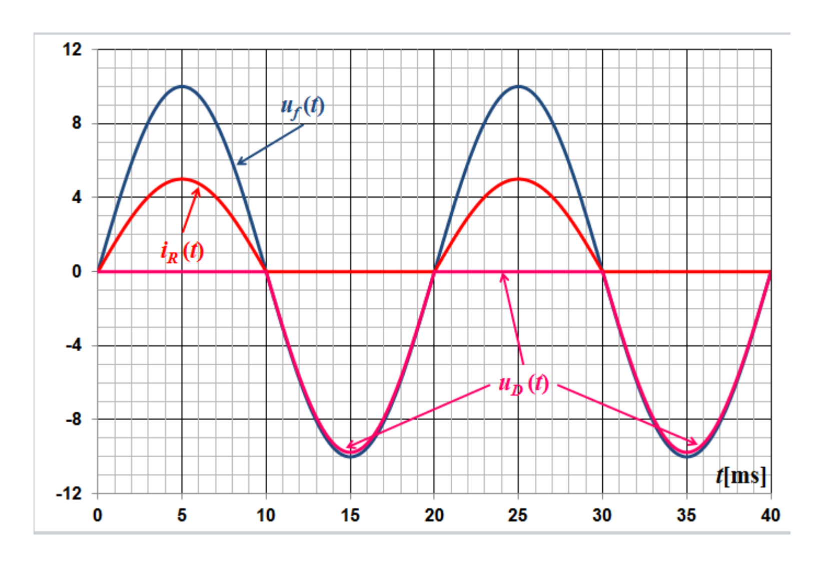


Figura 6-8 Formas de onda del rectificador monofásico de media onda

A partir de los resultados del análisis de las formas de onda se pueden efectuar algunas evaluaciones numéricas y definir algunos parámetros de diseño.

Evaluaciones numéricas

Respecto del primer objetivo planteado al introducir este tipo de circuitos se encuentra la evaluación del valor medio de la señal resultante en el resistor de carga, tensión y/o corriente. Dicho valor medio será representativo del valor *de continua* de la señal.

Otra evaluación importante está constituida por el valor eficaz o valor medio cuadrático de $u(t)$ e $i(t)$; dicha importancia radica en la relación del valor eficaz con la potencia.

Recordando las definiciones de valor medio y de valor eficaz se pueden escribir las ecuaciones siguientes:

$$I_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt \qquad \text{Ec. 6-2}$$

$$I_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} \qquad \text{Ec. 6-3}$$

En el caso del rectificador de media onda bajo estudio, queda como ejercicio para el lector verificar que la resolución de la Ec. 6-2 y la Ec. 6-3 con $i_R(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t)$ para $0 < \omega t < \pi$ y $i_R(t) = 0$ para $\pi < \omega t < 2\pi$, resultan:

$$I_{medio} = \frac{I_{máx}}{\pi} \qquad \text{Ec. 6-4}$$

$$I_{eficaz} = \frac{I_{máx}}{2} \qquad \text{Ec. 6-5}$$

Parámetros de diseño

La elección de un diodo en particular implica definir una serie de *parámetros de diseño*, los cuales surgen de las formas de onda y las evaluaciones numéricas vistas.

La *corriente máxima* o *de cresta* que debe soportar el diodo es uno de dichos parámetros. En general dicha corriente corresponde a la amplitud de la onda senoidal de corriente, según se observó en la Figura 6-8; no obstante, en ciertos casos dicha corriente puede resultar bastante mayor, como se verá más adelante.

La *potencia máxima admisible* en polarización directa es otro parámetro de diseño que no debe dejar de evaluarse. Si bien el análisis simplificado de circuitos con diodo considera su modelo más simple como una "llave cerrada" en polarización directa, por lo cual una rápida evaluación de la potencia en el mismo resulta cero debido a que $u_{AK}(t) = 0$, recordando la característica $I - U$ del diodo real de la Figura 6-1 se puede observar que además de la corriente directa del diodo aparece una tensión, por lo que el producto $p(t) = u_{AK}(t) \cdot i_D(t) \neq 0$. Por lo tanto valor medio de este producto debe ser tenido en cuenta en uso continuo.

La *tensión cresta inversa* también es un parámetro importante a considerar. Dicha tensión es la que aparece sobre el diodo en el intervalo de no conducción, y debe mantenerse por debajo de U_R, según el gráfico de la Figura 6-1.

6.5.2 Rectificador monofásico de onda completa con punto medio

Otro circuito rectificador muy utilizado es el *rectificador monofásico de onda completa con punto medio*, el cual se muestra en la Figura 6-6.

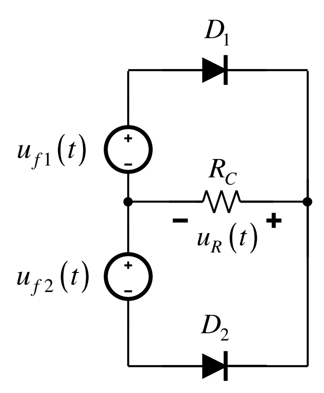


Figura 6-9 Rectificador monofásico de onda completa con punto medio

En el circuito de la Figura 6-9, $u_{f1}(t) = u_{f2}(t) = u_f(t)$.

Al igual que antes, el análisis típico implica suponer que la tensión de las fuentes es senoidal.

Este circuito puede verse un poco extraño al principio, teniendo en cuenta que el mismo tiene dos fuentes idénticas, las cuales además se encuentran en fase. En la práctica dichas fuentes generalmente se corresponden con el secundario de un transformador con punto medio como el de la Figura 6-10.

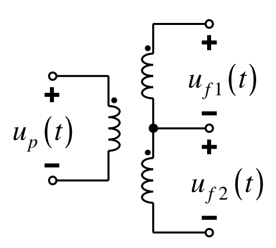


Figura 6-10 Transformador con punto medio

Como en el rectificador de media onda, los diodos se consideran ideales. Por lo tanto, observando la Figura 6-9, si la polaridad de las tensiones de las fuentes es la indicada es fácil verificar que el diodo D_1 se encuentra en polarización directa, mientras que el diodo D_2 se encuentra en inversa. En dicha situación, la tensión sobre el resistor u_R coincide con u_{f1} durante todo el semiciclo positivo, entregando esta última la correspondiente corriente a la carga, dado que D_1 se encuentra en directa; mientras que la fuente u_{f2} no entrega corriente a la carga en dicho semiciclo por encontrarse D_2 en inversa.

Cuando la polaridad de las tensiones de las fuentes se invierte en el segundo semiciclo, el funcionamiento de los diodos se invierte, encontrándose D_2 en polarización directa, mientras que D_1 se encuentra en inversa, u_R coincide con u_{f2} entregando esta última corriente a la carga.

La Figura 6-11 muestra la secuencia de conducción de los diodos en cada semiciclo; se puede verificar los sentidos de la corriente para cada uno. Se observa que la tensión sobre R tiene la misma polaridad en los dos semiciclos.

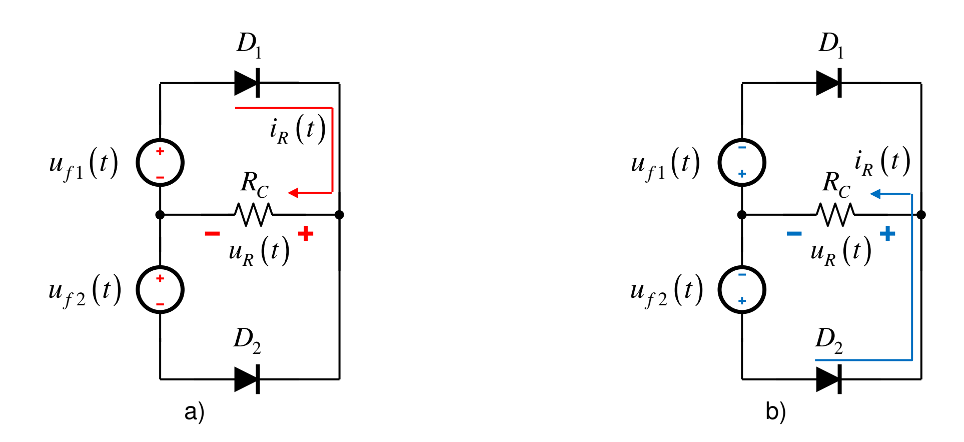


Figura 6-11 Sentidos de la corriente según el semiciclo: a) semiciclo positivo, b) semiciclo negativo.

A la vez, analizando por segunda ley de Kirchhoff la Figura 6-11a) y la Figura 6-11b), claramente se puede apreciar que durante el primer semiciclo la tensión del diodo D_2 (que está en inversa) es el doble que la tensión de la fuente, mientras que en el segundo semiciclo la tensión sobre D_1 duplica a la de la fuente, por estar en inversa. Debe recordarse en este caso lo mencionado respecto de los parámetros de diseño y la tensión inversa de cresta en el diodo, siendo posible aplicar los mismos criterios que en el caso anterior.

La Figura 6-12 muestra las formas de onda resultantes.

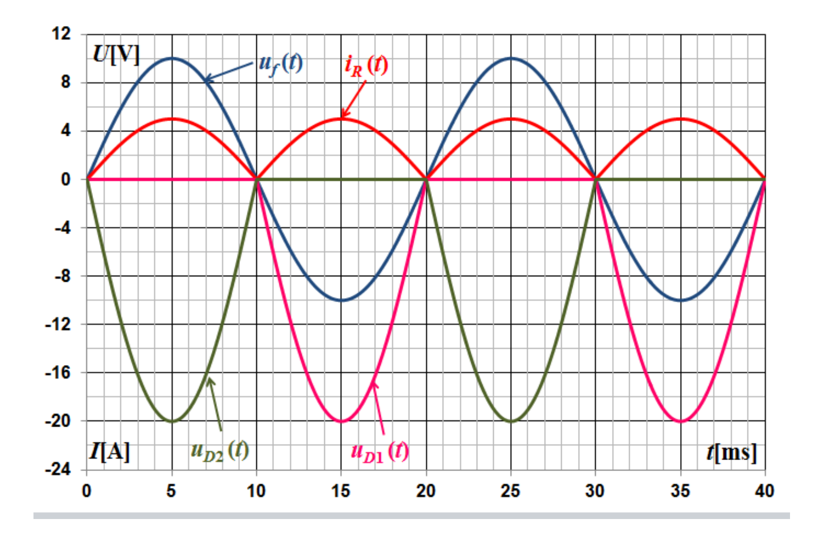


Figura 6-12 Formas de onda del rectificador monofásico de onda completa

En forma similar al caso del rectificador de media onda, queda como ejercicio para el lector verificar que la resolución de la Ec. 6-2 y la Ec. 6-3 cuando $i_R(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t)$, que resultan:

$$I_{medio} = \frac{2I_{máx}}{\pi} \qquad \text{Ec. 6-6}$$

$$I_{eficaz} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} \qquad \text{Ec. 6-7}$$

Puede observarse en este caso que el período de las ondas de tensión y corriente en la carga resulta ahora igual a la mitad del período de la onda senoidal original.

6.5.3 Rectificador monofásico de onda completa con diodos en puente

En este circuito se utilizan cuatro diodos configurando un circuito puente, tal como se muestra en la Figura 6-13.

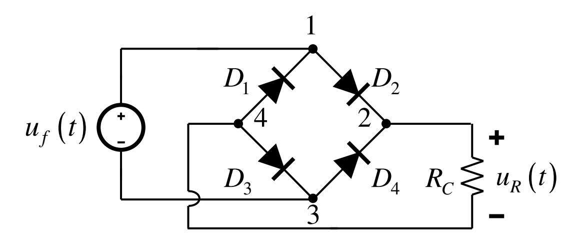


Figura 6-13 Rectificador monofásico de onda completa con diodos en puente

La orientación de los diodos en el puente es importante, como se verá en el análisis que sigue. Se han identificado los nodos del mismo para una mejor comprensión.

Al igual que en todos los casos vistos, el análisis típico implica suponer que la tensión de la fuente es senoidal y que los diodos son ideales y se comportan según el modelo de la Figura 6-3a).

Suponiendo, como siempre, que se inicia el análisis cuando la tensión de la fuente inicia el ciclo positivo en $t = 0$, debe verificarse qué diodo o diodos se encuentran en directa (estado de conducción).

En las condiciones mencionadas para la fuente durante el semiciclo positivo, el nodo 1 presenta la mayor tensión respecto de cualquiera de los demás nodos, con lo cual se puede asegurar que el diodo D_2 está en directa, por lo tanto, conduce. Luego, la tensión del nodo 2 es la misma que la del nodo 1; si se pretende aplicar la ley de Kirchhoff de corrientes en dicho nodo, la corriente que proviene de D_2 no puede dirigirse hacia D_3, estando éste en inversa, por lo cual dicha corriente pasa directamente por R y de allí se dirige hacia el nodo 4. Al aplicar LKC en este último, se advierte que este nodo se encuentra a menor tensión que el nodo 1 y a mayor tensión que el nodo 3 (en rigor, el modelo del diodo ideal indica que $U_4 = U_3$), por lo cual D_1 estará en inversa y D_4 en directa; y en consecuencia la corriente se establecerá por este último con sentido al borne negativo de la fuente. La Figura 6-14a) ilustra el sentido de la corriente en el semiciclo positivo de la tensión de la fuente.

Siguiendo las pautas del párrafo anterior, el lector puede verificar que el sentido de la corriente para el semiciclo negativo es el indicado en la Figura 6-14b).

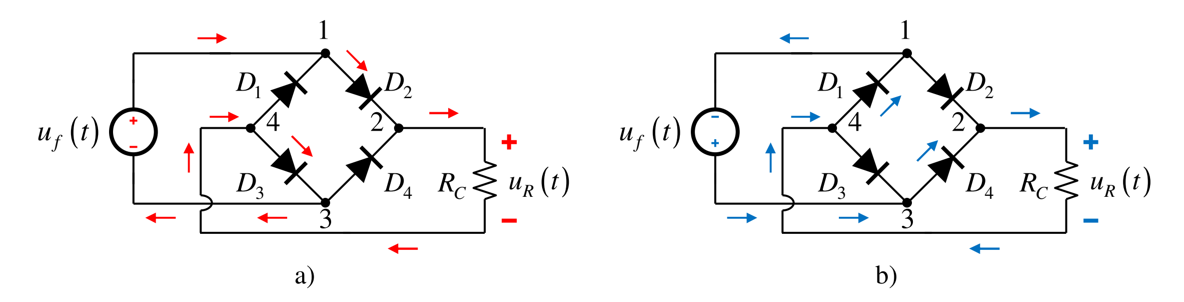


Figura 6-14 Rectificador monofásico de onda completa con diodos en puente: a) sentido de la corriente para el semiciclo positivo, b) sentido de la corriente para el semiciclo negativo.

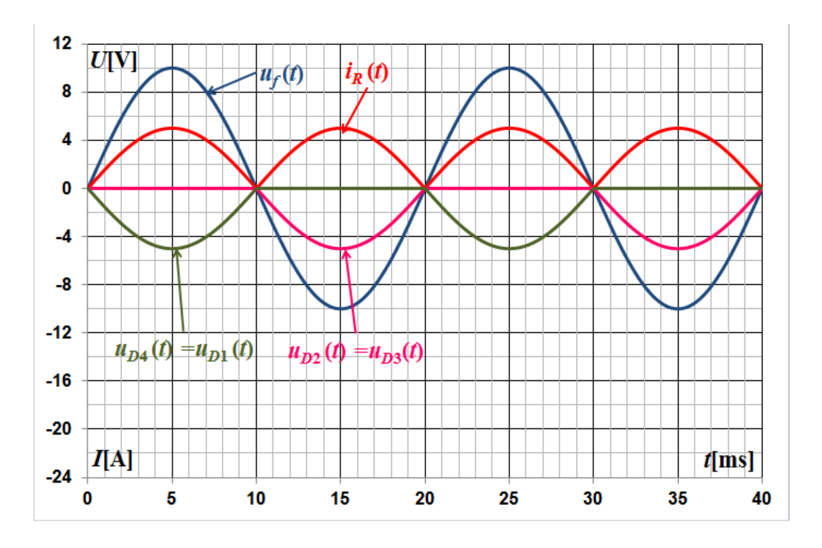


Figura 6-15 Formas de onda del rectificador monofásico de onda completa

Se puede observar que la polaridad de la tensión u_R resulta la misma para ambos semiciclos.

La gráfica de las formas de onda es similar a la de la Figura 6-9, excepto las tensiones inversas en los diodos, las cuales resultan iguales a la mitad de la tensión de la fuente, tal como se ve en la Figura 6-15.

Dado que desde el punto de vista del resistor de carga las formas de onda de corriente y tensión son idénticas a las del rectificador con punto medio, la resolución de la Ec. 6-2 y la Ec. 6-3 cuando $i_R(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t)$ da como resultado la Ec. 6-6 y la Ec. 6-7, y el período de las mismas también es la mitad del período de la onda original.

6.5.4 Rectificador trifásico de media onda

Otro de los circuitos simples con el cual se puede obtener señales con valor medio distinto de cero a partir de ondas con valor medio cero es el *rectificador trifásico de media onda* que se muestra en la Figura 6-16.

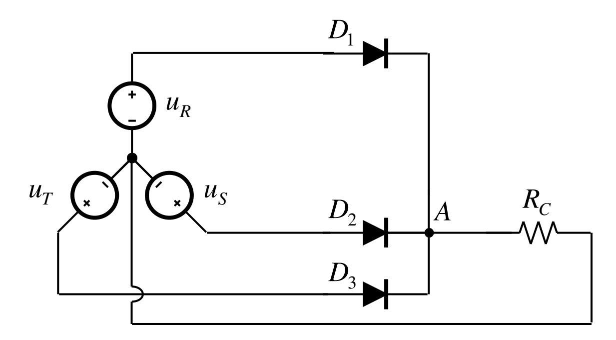


Figura 6-16 Rectificador trifásico de media onda

Para el análisis del circuito de la Figura 6-16, resulta útil dibujar las formas de onda de tensión de fase del generador trifásico, que se muestran en la Figura 6-17.

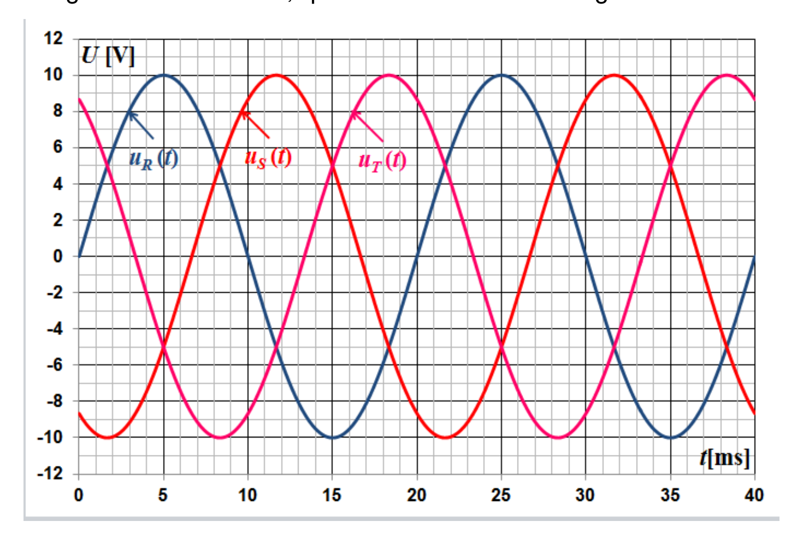


Figura 6-17 Tensiones de fase del generador trifásico

Para iniciar el análisis debe tenerse en cuenta la onda con mayor valor de tensión en un instante dado. Por ejemplo, en el instante en que la onda u_R comienza a tomar valores mayores que u_T, el diodo D_1 se pone en directa, pues u_R es mayor que u_S y u_T, por lo tanto, D_2 y D_3 están en inversa. Entonces D_1 conduce, se establece corriente en el resistor de carga, siendo su tensión igual a u_R y la corriente tiene un sentido tal que se cierra a través del nodo N. Esta situación se mantiene hasta que u_S pase a ser mayor que u_R, donde el fenómeno se reinicia con D_2 en directa y D_1 y D_3 en inversa, D_2 conduce la tensión en la carga es u_S y la corriente vuelve a cerrarse a través del nodo N. Nuevamente el fenómeno se repite cuando u_T sea mayor que u_S. La Figura 6-18 muestra el resultado final de la forma de onda de i_{R_c}, para $R_c = 2\,\Omega$ .Esya corriente, en otra escala, también representa la tensión en el resistor.

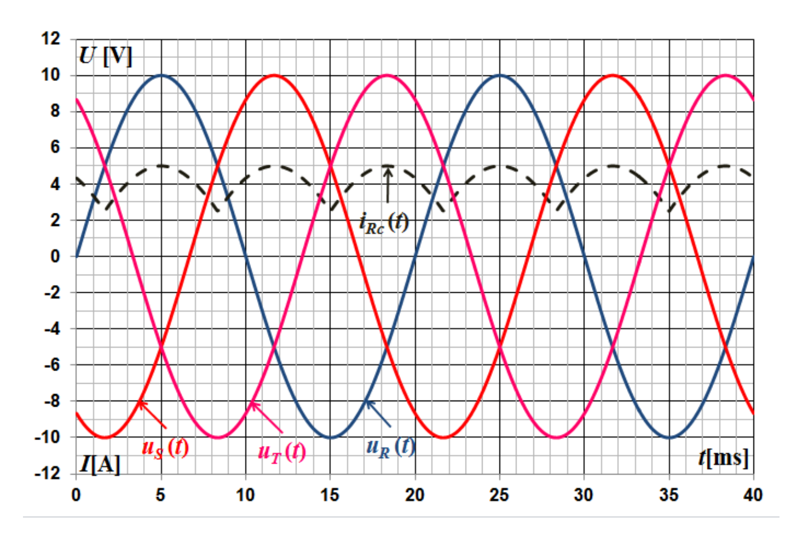


Figura 6-18: Tensión y corriente en la carga de un rectificador trifásico de media onda

Se puede verificar que i_{R_c} se corresponde con las crestas positivas de las tensiones de fase de las fuentes del sistema trifásico. Sólo resta indicar en qué intervalo conduce cada diodo, lo cual se deja como ejercicio para el lector.

De la resolución de la Ec. 6-2 y la Ec. 6-3 cuando $i_{Rc}(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t)$, se obtiene:

$$I_{medio} = \frac{3\sqrt{3} I_{máx}}{2\pi} \qquad \text{Ec. 6-8}$$

$$I_{eficaz} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} sen\frac{2\pi}{3}\right)} I_{máx} \qquad \text{Ec. 6-9}$$

Puede observarse en este caso que el período de las ondas de tensión y corriente en la carga resulta ahora igual a un tercio del período de la onda senoidal original.

6.5.5 Ondulación

De la secuencia de estudios realizados sobre los rectificadores, se puede observar que los valores medios de las formas de onda de tensión y corriente en la carga aumentan progresivamente según el circuito analizado, mientras que las amplitudes de las mismas disminuyen, particularmente al pasar del rectificador monofásico al trifásico.

Es decir que se podría establecer una relación entre el aumento del valor medio y la disminución de la amplitud de dichas formas de onda con el objeto de definir la "calidad" de la rectificación, dado que el objetivo final muchas veces es conseguir una señal continua constante e independiente del tiempo.

Es así que se define el *factor de ondulación*, *factor de rizado* o *factor de ripple* (denominaciones que dependen de la bibliografía consultada), cuya expresión es:

$$r\% = \frac{\frac{U_{máx} - U_{mín}}{2}}{U_{medio}} 100 \qquad \text{Ec. 6-10}$$

Los parámetros de la Ec. 6-10 se relacionan observando la Figura 6-19.

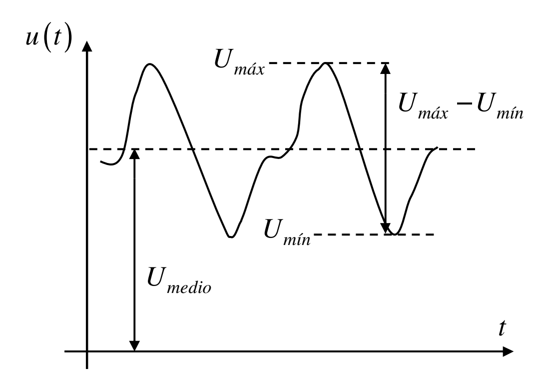


Figura 6-19 Parámetros de una señal que definen el factor de ondulación

Observando la Ec. 6-10 y la gráfica de la Figura 6-19, se puede advertir que resulta conveniente que el factor de ondulación sea lo más bajo posible; esto ocurre si U_{medio} es suficientemente grande o si $U_{máx} - U_{mín}$ es suficientemente pequeño. El caso extremo ($r\% = 0$) indica que la señal es una continua independiente del tiempo.

6.5.6 Conclusiones

En todos los casos de circuitos rectificadores estudiados hasta este punto podría determinarse su factor de ondulación. Es interesante observar que, en forma progresiva, dichos circuitos van "mejorando" el factor de ondulación de la onda obtenida. Se invita al lector a determinar $r\%$ de cada uno de tales circuitos para verificar esta afirmación.

6.6 Rectificadores controlados

Un circuito rectificador controlado es un conversor *CA/CC* que permite obtener la variación del valor medio de la tensión (o de la corriente) de salida en la carga, variando de este modo la potencia.

El elemento básico que permite tal conversión es el tiristor, ya estudiado en la sección 6.3. Es posible obtener este resultado mediante diversos circuitos con diferentes configuraciones de dichos elementos.

Las secciones que siguen presentan algunos circuitos simples que permiten obtener señales continuas de valor medio variable a voluntad mediante una señal de control adecuada. Dichos circuitos son similares a algunos ya vistos en la sección 6.5.

Antes de iniciar al análisis de los circuitos propiamente dichos, se van a mencionar algunas cuestiones referidas al funcionamiento del tiristor, con el objeto de facilitar la comprensión de su comportamiento en este tipo de circuitos.

6.6.1 El tiristor en el control de potencia

Observando la característica $I-U$ del tiristor (Figura 6-6) se puede ver que si se aplica en forma instantánea una tensión u_{AK} mayor que U_D el elemento inicia la conducción de forma inmediata, es decir *se dispara*; en caso contrario, el dispositivo se mantiene bloqueado. De la misma forma, si la tensión u_{AK} aplicada es positiva y no supera U_D, pero se aplica una corriente i_G en la compuerta G, el disparo ocurrirá en función de los valores de la tensión u_{AK} y de la i_G aplicada.

Según se advierte en el gráfico de la Figura 6-6, si la corriente i_G es suficientemente grande, la conducción del tiristor se inicia para tensiones u_{AK} levemente mayores que cero; por lo tanto, esta característica del funcionamiento es la que se aplica para realizar el disparo del tiristor independientemente del valor de la tensión u_{AK}, siempre y cuando ésta sea positiva. En otras palabras: si u_{AK} es positiva (aunque menor que U_D), el tiristor se disparará en un cierto instante si en dicho instante se aplica una corriente i_G grande (siempre que no se supere la i_G admisible por el dispositivo).

En general, la corriente de disparo i_G es generada por un *circuito de control* cuyo diseño y análisis queda fuera de los objetivos de este texto.

Debe aclararse que normalmente la corriente de disparo es mucho menor que cualquier otra corriente del circuito. Ésto debe ser así, puesto que se entiende que los circuitos adicionales de control y comando deben manejar potencias mucho menores que los circuitos principales para que estos sistemas tengan sentido.

6.6.2 Rectificador controlado de media onda con tiristor y carga resistiva

El circuito rectificador controlado más simple corresponde al rectificador de media onda con tiristor y carga resistiva, el cual se ilustra en la Figura 6-20.

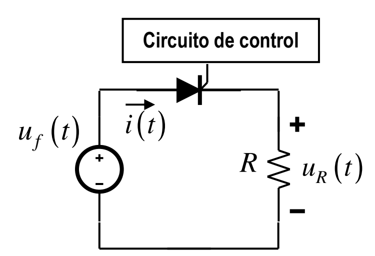


Figura 6-20 Rectificador monofásico de media onda

Teniendo en cuenta lo mencionado respecto de la conversión *CA/CC*, el análisis típico de este circuito implica suponer que la tensión de la fuente $u_f(t)$ es senoidal. Recordando lo mencionado en la sección 6.6.1 respecto del funcionamiento del tiristor, aun cuando la tensión de la fuente comience a tomar valores positivos y el dispositivo se encuentre polarizado en directa, éste no comenzará a conducir hasta que el circuito de control aplique la corriente correspondiente en la compuerta del tiristor.

De esta forma, si i_G se aplica en un determinado instante del período de la onda senoidal, el disparo del tiristor y la consecuente conducción ocurrirá a partir de dicho instante. Dada la correlación que existe entre el tiempo y el ángulo en una señal senoidal, se puede hablar de *tiempo de disparo* t_d o *ángulo de disparo* θ_d del tiristor, tal como se muestra en la Figura 6-21.

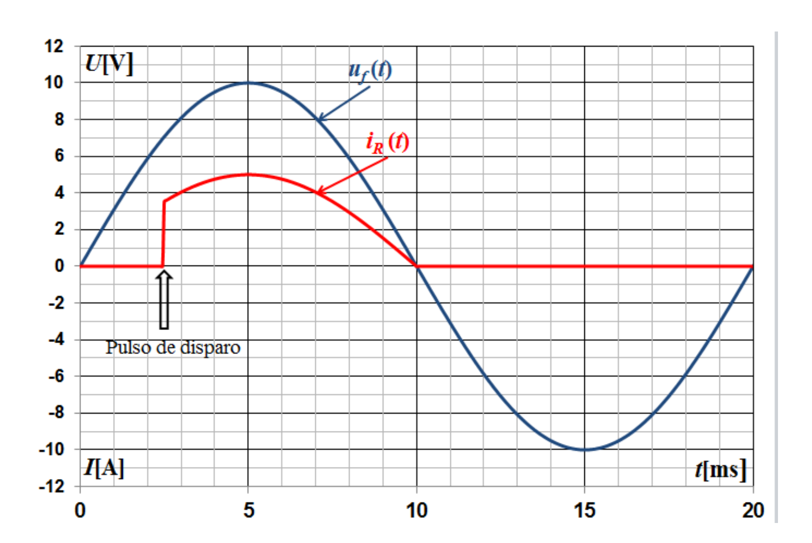


Figura 6-21 Formas de onda en el rectificador controlado monofásico de media onda con tiristor

Para el tiempo indicado con la flecha en la Figura 12-21, se aplica a la compuerta un pulso i_G de cierta amplitud pero de muy corta duración a la compuerta, lo que provoca el disparo del tiristor. Debe observarse que no es necesario que el pulso sea muy largo, sólo se requiere que su amplitud sea suficiente para provocar el disparo del dispositivo; ya que una vez que se consigue la conducción, el tiristor queda en dicho estado y recién se bloquea cuando su tensión u_{AK} toma valores negativos.

De este modo, cambiando la ubicación del pulso de disparo es posible obtener diferentes tiempos (o ángulos) de disparo lo que dará lugar a diferentes valores medios de la corriente. Otro ejemplo se muestra en la Figura 6-22.

Claramente se observa que la corriente del circuito tiene un valor medio menor en la Figura 6-22 que en la Figura 6-21 y esto se consigue simplemente eligiendo en qué instante se aplica el pulso de disparo en la compuerta.

Dado el carácter resistivo de la carga y, si se supone que el tiristor una vez que entra en el estado de conducción se comporta como una llave cerrada, se advierte que la tensión en R es idéntica a la de la fuente; por lo tanto, la forma de onda de la corriente coincide con la de la tensión en el resistor, salvo un factor de escala que depende de la ley de Ohm.

Para el cálculo del valor medio de la corriente se utiliza la expresión de la Ec. 6-2, que vuelve a escribir a continuación.

$$I_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$$

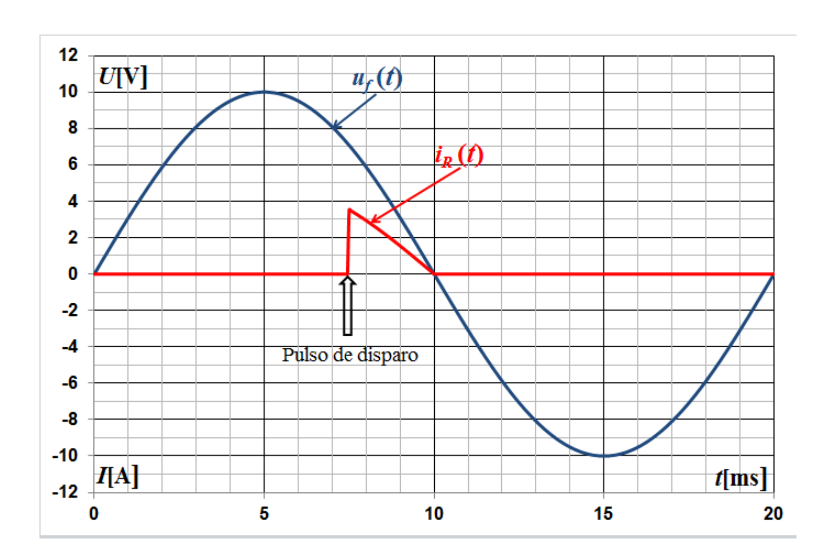


Figura 6-22 Formas de onda del circuito de Figura 6-17 con ángulo de disparo diferente al de Figura 6-18

Dicha expresión sigue siendo válida, aunque se puede especificar los límites de la integral teniendo en cuenta el ángulo o el tiempo del disparo, según convenga (Ec. 6-11).

$$I_{medio} = \frac{1}{T}\int_{t_d}^{T/2} i(t)\,dt \qquad \text{Ec. 6-11}$$

Si fuera necesario calcular la potencia en la carga, la Ec. 6-3 se puede aplicar para obtener el valor eficaz de $i(t)$, según muestra la Ec. 6-12.

$$I_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_d}^{T/2} i^2(t)\,dt} \qquad \text{Ec. 6-12}$$

Expresiones similares pueden aplicarse a la tensión en el resistor de carga.

Finalmente se puede mencionar que lo desarrollado en esta sección se puede aplicar a los circuitos rectificadores monofásicos de onda completa y trifásicos de media onda, lo cual se sugiere como ejercicio para el lector.

6.7 Rectificadores con carga RL y RC

6.7.1 Rectificador de media onda con carga RL

La Figura 6-23 muestra un circuito rectificador de media onda con carga RL típico. Esta carga podría estar representando, por ejemplo, un motor eléctrico de continua mediante su modelo más simple.

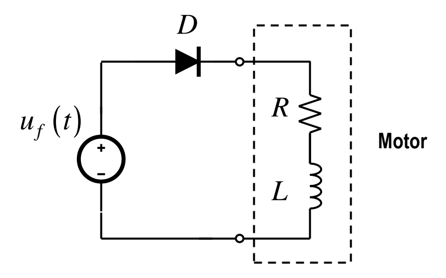


Figura 6-23 Rectificador monofásico con carga RL

Como siempre, se supone que la tensión de la fuente tiene forma senoidal, $u_f(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t)$ con $U_{máx} = 10\ \text{V}$.

Conviene iniciar el análisis de este circuito suponiendo que el inductor se encuentra en condiciones iniciales nulas (descargado, sin corriente) y que cuando comienza el semiciclo positivo de la tensión de fuente y el diodo empieza a conducir la situación se asemeja a un circuito en régimen transitorio, donde el diodo representa a una llave que se cierra justo en el instante en que comienza dicho semiciclo ($t = 0$).

En estas condiciones se puede aplicar la ecuación diferencial del circuito:

$$u_f(t) = i \cdot R + L\frac{di}{dt} \qquad \text{Ec. 6-13}$$

Además, como se sabe del estudio de circuito en régimen transitorio, la respuesta total o completa de la corriente es la suma de las componentes natural y permanente $i_n(t)$ e $i_p(t)$, respectivamente,

$$i_t(t) = i_n + i_p \qquad \text{Ec. 6-14}$$

que a su vez corresponden a las soluciones de las ecuaciones diferenciales homogénea y particular que surgen de la Ec. 6-13, respectivamente. Por lo tanto, se puede decir que, al menos en los primeros instantes de conducción del diodo, la corriente tiene la expresión de la Ec. 6-15.

$$i_t(t) = \frac{U_f}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot sen(\theta) \cdot e^{\frac{-t}{L/R}} + \frac{U_f}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot sen(\omega t - \theta) \qquad \text{Ec. 6-15}$$

siendo $\theta = arctg(\omega L/R)$.

Esta ecuación es válida a partir del inicio de la conducción del diodo y hasta que la corriente se haga cero, puesto que en dicho momento la tensión de la fuente ya habrá cambiado de polaridad quedando el diodo en inversa y no permitiendo por tanto la conducción.

Todo el análisis realizado se sintetiza en la gráfica de la Figura 6-24 para $X_L/R = 1$.

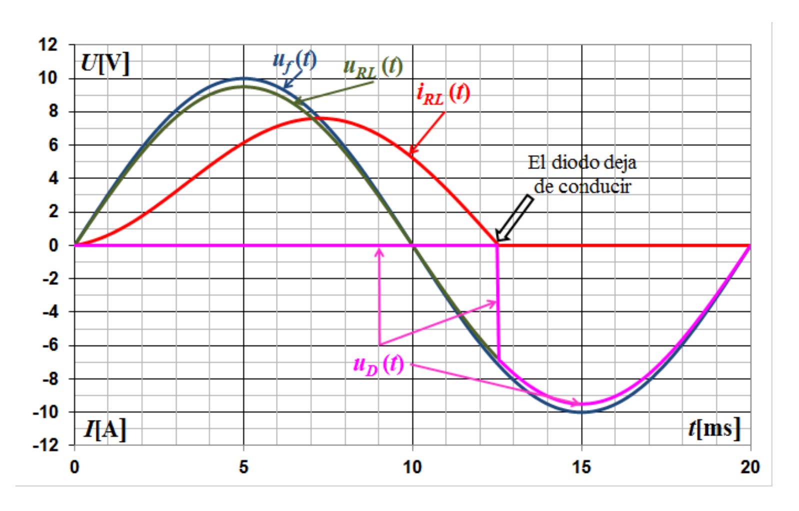


Figura 6-24 Formas de onda en el rectificador monofásico con carga RL

Debe tenerse en cuenta que mientras el diodo conduce, y dado que éste se supone ideal, las tensiones de la fuente y de la carga RL son iguales; mientras que en el intervalo en el que el diodo no conduce, la tensión de la fuente es igual a la tensión inversa del diodo. En la Figura 6-24, debe observarse que las escalas de las tensiones del diodo y de la carga son las mismas, pero diferentes de la escala de tensión de la fuente al solo efecto de poder visualizar todas las formas de onda.

La Figura 6-25 muestra las formas de onda de la Figura 6-24 y se incluyen las componentes permanente y natural que dan lugar a la corriente total en la carga RL.

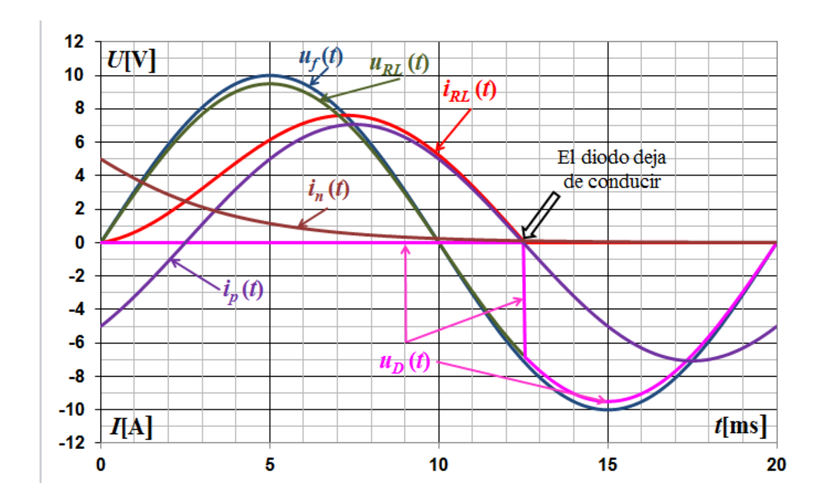


Figura 6-25 Formas de onda en el rectificador monofásico con carga RL incluidas las componente natural y forzada de la corriente en la carga

6.7.2 Rectificador de media onda con carga RC

La Figura 6-26 muestra un circuito rectificador de media onda con carga RC típico. Este circuito, en el que se conecta un capacitor en paralelo con la carga R, es muy utilizado cuando se requiere disminuir la ondulación en R.

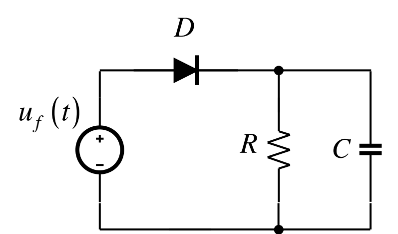


Figura 6-26 Rectificador monofásico con carga RC

Igual que antes, se supone que la tensión de la fuente tiene forma senoidal $u_f(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t)$ con $U_{máx} = 10\,\text{V}$.

En este caso, y por simplicidad, también se supone que el capacitor se encuentra descargado y la aplicación de la tensión de la fuente se inicia en $t = 0$; es decir que cuando comienza el semiciclo positivo de la tensión de fuente y el diodo empieza a conducir, la situación se asemeja a un circuito en régimen transitorio, donde el diodo representa a la llave que se cierra justo en el instante en que comienza dicho semiciclo ($t = 0$).

En estas condiciones, y dado que el diodo se supone ideal, hay una única tensión en el circuito; es decir que $u_f(t) = u_R(t) = u_C(t)$. Por lo tanto, se establecerá una corriente por el resistor, cuyo valor surge de la ley de Ohm; y otra corriente por el capacitor cuyo valor estará da-

do por su ecuación constitutiva $i_C\left(t\right)=C\dfrac{du_f}{dt}$. Esta situación se mantendrá hasta que la tensión de fuente alcance la cresta. Si el diodo no estuviese, la corriente del capacitor entraría en el semiciclo negativo; pero, en cambio, el diodo queda polarizado en inversa, impidiendo que la corriente del capacitor retorne a la fuente, descargándose a través del resistor.

Dependiendo del valor de la constante de tiempo que resulte del producto $R\cdot C$, la descarga del capacitor terminará o no (en términos prácticos) antes de que finalice el ciclo. Suponiendo el primer caso, al iniciar el ciclo siguiente, el proceso se repite; lo cual se muestra en la Figura 6-27 para $R=1\,\Omega$ y $C=250\,\mu\text{F}$. En el gráfico se trazó una línea punteada negra que separa el tramo de $i_R\left(t\right)$ correspondiente a la conducción del diodo (hacia la izquierda) del correspondiente a la descarga del capacitor (a la derecha).

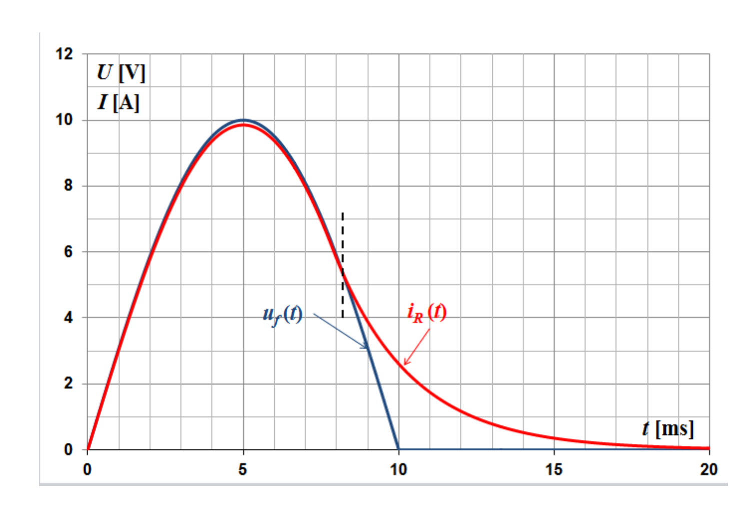


Figura 6-27 Formas de onda en el rectificador monofásico con carga RC y constante de tiempo baja

En el caso que la constante de tiempo sea suficientemente grande, la descarga se prolongará sobre el siguiente ciclo y así siguiendo en los sucesivos ciclos. La Figura 6-28 ilustra este caso para $R=1\,\Omega$ y $C=1{,}25\text{ mF}$.

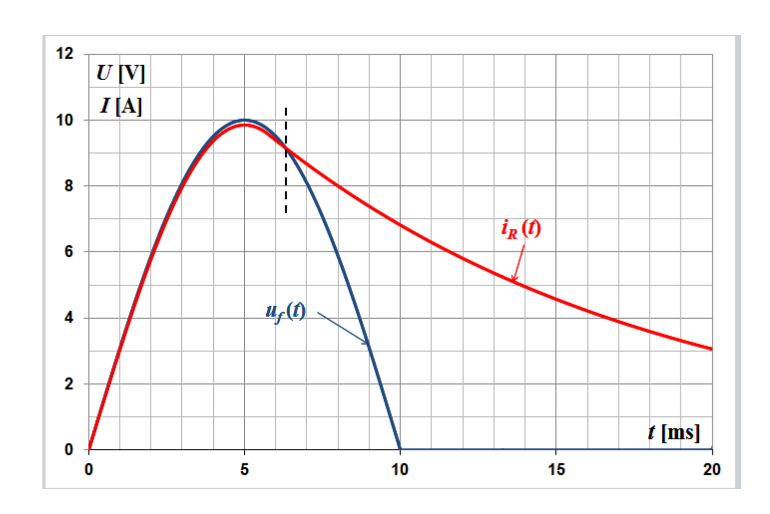


Figura 6-28 Formas de onda en el rectificador monofásico con carga RC y constante de tiempo alta

Puede observarse como conclusión y por simple inspección de las Figuras 6-27 y 6-28, que cuanto mayor sea la constante de tiempo, menor será la ondulación de la forma de onda de tensión y corriente en la carga R.

La Figura 6-29 detalla más el caso de baja constante de tiempo ahora con $R = 10\,\Omega$ y $C = 250\,\mu\text{F}$. Se agregan en la misma $i_D(t)$ e $i_C(t)$

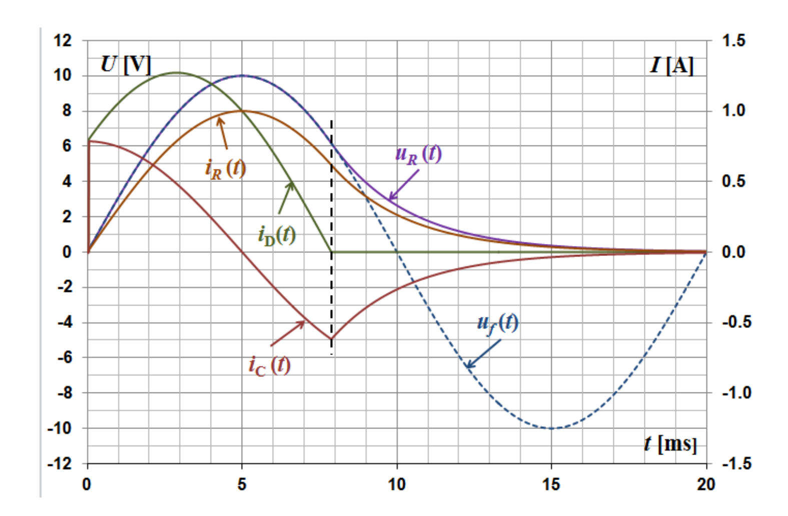


Figura 6-29 Formas de onda de corriente en el rectificador monofásico con carga RC

En forma similar a los casos anteriores, las s corrientes se separan en tramos mediante la recta vertical punteada de color negro. A la izquierda, $i_R(t)$ representa la corriente en el resistor durante la carga del capacitor y a la derecha se representa la descarga del mismo. Para ($i_C(t)$, a la izquierda se ve la corriente de carga del capacitor y a la derecha la de descarga.

Puede verificarse que la corriente de descarga del capacitor es igual y de signo contrario a la corriente del resistor en el mismo intervalo y la suma de las dos en todo instante es $i_D(t)$.

6.7.3 Rectificador controlado de media onda con carga RL

La Figura 6-30 muestra un circuito rectificador de media onda controlado con tiristor y carga RL. La tensión de la fuente es senoidal, $u_f(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t)$ con $U_{máx} = 10\text{ V}$.

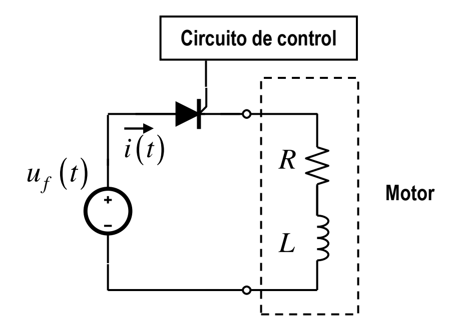


Figura 6-30 Rectificador monofásico con tiristor y carga RL

Recordando lo indicado en la seccion 6.7.1, conviene iniciar el análisis del circuito suponiendo que el inductor se encuentra en condiciones iniciales nulas (descargado, sin corriente). Cuando el tiristor se dispara durante el semiciclo positivo de la tensión de fuente y comienza a conducir, nuevamente la situación se asemeja a un circuito en régimen transitorio, donde el tiristor representa a una llave que se cierra justo en el instante del disparo.

Luego, es posible aplicar la ecuación diferencial del circuito Ec. 6-13. Además, teniendo en cuenta la Ec. 6-14, al menos en los primeros instantes de conducción del tiristor, la corriente tiene la expresión de la Ec. 6-15 ya vista.

En la Figura 6-31 se han dibujado las tensiones en la carga RL y en el tiristor con una escala levemente diferente de la de la tensión de la fuente con el objeto de visualizar mejor las formas de onda. Pero debe observarse que, dado que se supone que el tiristor se comporta como una llave cerrada durante todo el intervalo de conducción, la tensión en RL es igual a la de la fuente en dicho intervalo. Asimismo, cuando el tiristor no conduce, la tensión de la fuente queda aplicada a este último.

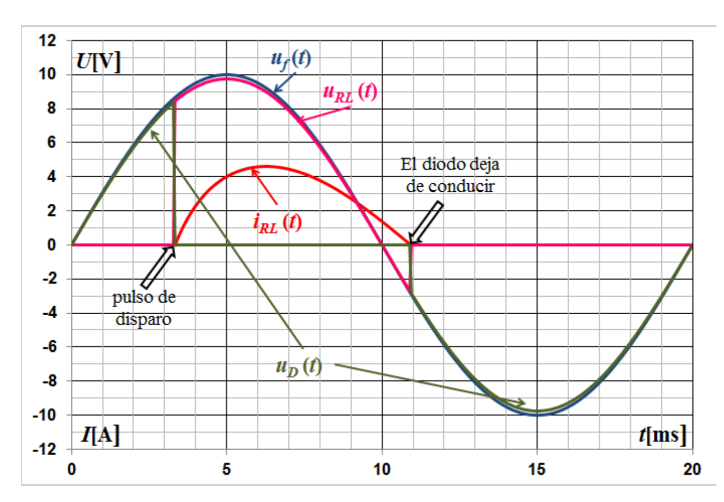


Figura 6-31 Formas de onda en el rectificador controlado monofásico con carga RL

La Figura 6-32 muestra las formas de onda de la Figura 6-31 y se incluyen, además, las componentes permanente y natural que dan lugar a la corriente total en la carga a partir del instante en que se aplica el pulso de disparo.

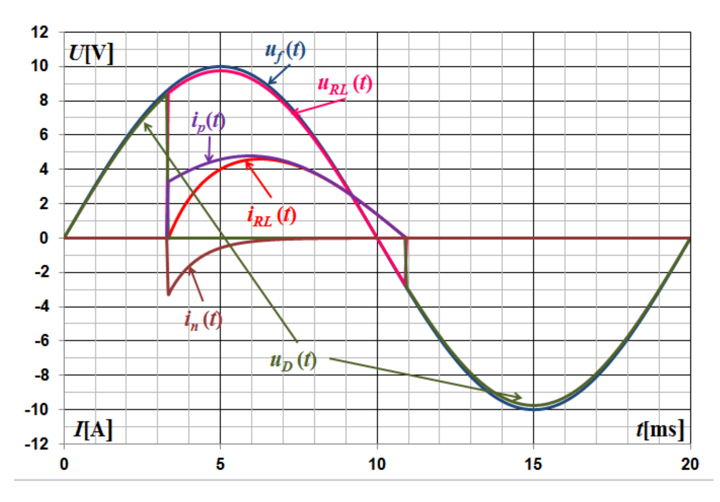


Figura 6-32 Formas de onda en el rectificador controlado monofásico con carga RL incluidas las componente natural y forzada de la corriente en la carga

6.8 Referencias bibliográficas

"Power Electronics. Converters, Applications and Design"; N. Mohan, T.M. Undeland, W.P. Robbins. Editorial John Wiley & Sons, Inc.

CAPÍTULO 7
Amplificadores operacionales

El circuito electrónico conocido como amplificador operacional (AmpOp) ha cobrado una importancia cada vez mayor. Sin embargo, un análisis detallado de este circuito requiere una comprensión de dispositivos electrónicos tales como los transistores. Se verá a lo largo del presente capítulo que no resulta completamente necesario entender la operación de los componentes electrónicos que gobiernan su comportamiento. Son varias las razones para ello.

En primer lugar, resulta perfectamente posible apreciar el modo en que puede usarse un AmpOp como bloque componente de otros circuitos más complejos centrándose simplemente en el comportamiento que presenta en sus terminales.

En segundo lugar, el modelo de circuito del AmpOp requiere el uso de una fuente controlada; de esta forma, el lector tendrá la posibilidad de utilizar este tipo de fuente en un circuito práctico.

En tercer lugar, puede combinarse el AmpOp con resitores y capacitores para realizar operaciones matemáticas.

7.1 Introducción

La Figura 7-1 muestra el circuito real completo de un amplificador operacional comercial. El mismo está conformado por una considerable cantidad de componentes: 22 transistores, 11 resistores, 1 diodo y 1 capacitor; es decir, 35 elementos de circuito confinados a una superficie de menos de 1 mm^2 (circuito integrado).

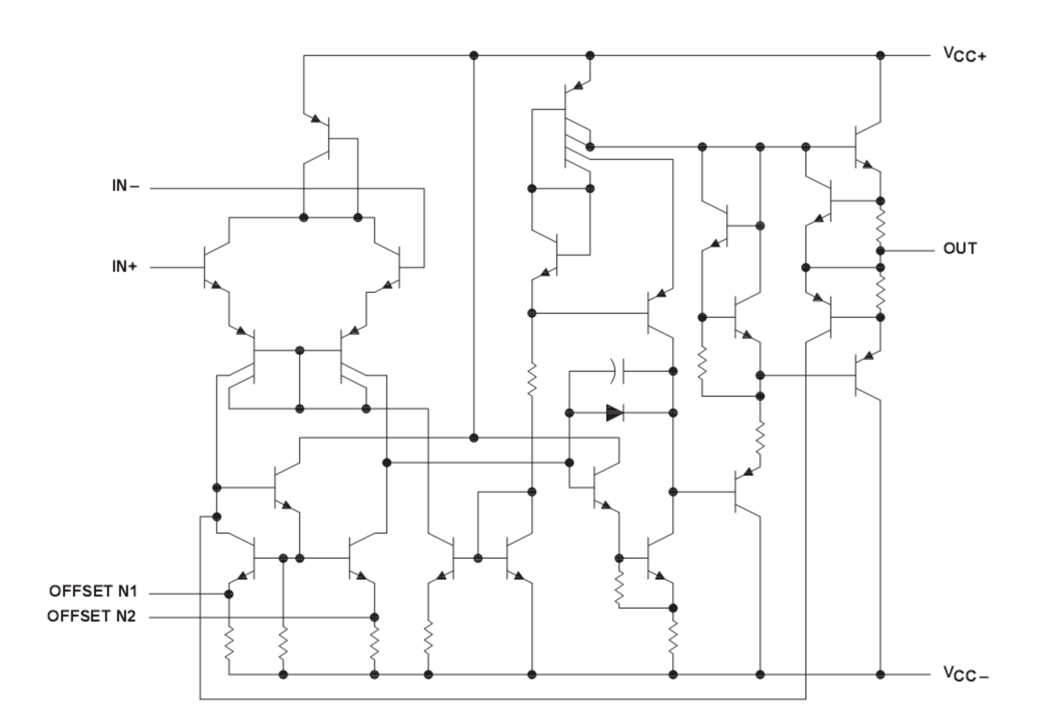


Figura 7-1 Circuito real completo de un amplificador operacional típico

Una discusión completa de los componentes internos de un AmpOp está más allá del objetivo de este capítulo. Resultará suficiente tratar al AmpOp como un bloque constitutivo de circuito ("caja negra") y estudiar simplemente lo que ocurre en sus terminales. Un AmpOp se diseña de modo que efectúe algunas operaciones matemáticas cuando se le conectan componentes externos, como resistores y capacitores. Por lo tanto, no interesa la estructura interna del amplificador ni las corrientes y tensiones que existen dentro de esta estructura. Lo que hay que tener en cuenta es que el comportamiento interno del amplificador es el responsable de las restricciones de tensión y de corriente impuestas en los terminales.

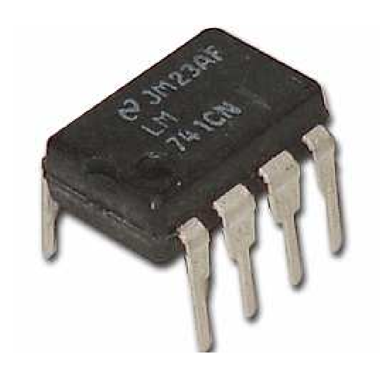
El término amplificador operacional fue introducido en 1947 por John Ragazzini y sus colegas en su trabajo sobre computadoras analógicas, realizado para el Consejo de Investigación de la Defensa Nacional de los Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. Los primeros amplificadores operacionales utilizaron tubos de vacío ("válvulas") en lugar de transistores.

El AmpOp es fundamental en ciertos circuitos debido a su flexibilidad. Es una unidad electrónica que se comporta como una fuente de tensión controlada por tensión. También puede emplearse para fabricar una fuente de corriente controlada por tensión o por corriente. Un AmpOp puede sumar señales, amplificar o cambiar el signo (la polaridad de una tensión o la

dirección de una corriente) de una señal, integrarla o diferenciarla. La capacidad del amplificador operacional para efectuar estas operaciones matemáticas constituye la razón por la que se lo llama de esta manera. Es la razón también del extenso uso de los amplificadores operacionales en el diseño analógico. Estos elementos son de uso común en el diseño de circuitos debido a que son flexibles, económicos, fáciles de usar y hasta resulta divertido trabajar con ellos.

Los amplificadores operacionales se consiguen comercialmente en paquetes de circuitos integrados en varias formas. La Figura 7-2 presenta un encapsulado típico de AmpOp en línea doble de 8 terminales (o DIP, por sus siglas en inglés de *dual in-line package*).

Las Figuras 7-3 y 7-4 muestran la identificación de los terminales de un AmpOp con encapsulado DIP y su correspondencia con el símbolo de circuito representativo más difundido.



Detalle del encapsulado



Comparación de tamaño

Figura 7-2 AmpOp con encapsulado DIP8.

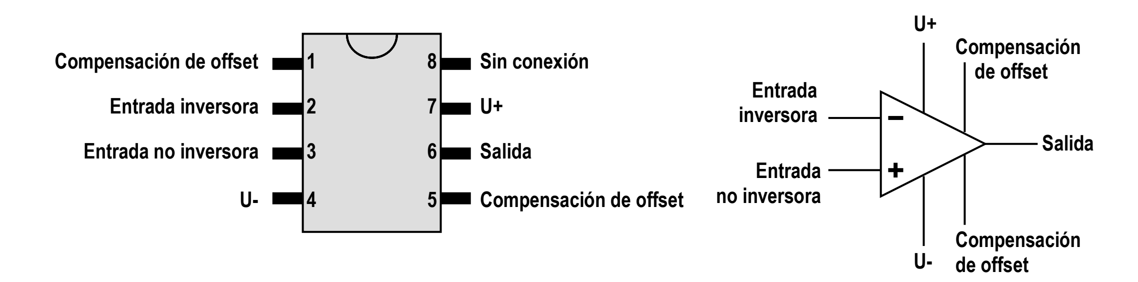


Figura 7-3 Identificación de los terminales de un AmpOp con encapsulado DIP de 8 terminales

Figura 7-4 Símbolo de circuito y su correspondencia con el encapsulado DIP

Si bien las Figuras 7-3 y 7-4 muestran la identificación de los terminales de un AmpOp real, el alcance del presente capítulo no involucra a los terminales 1 y 5.

7.2 Modelo y funcionamiento del amplificador operacional

7.2.1 Modelo

El símbolo de circuito para el AmpOp es el mostrado en la Figura 7-4. El AmpOp tiene dos entradas y una salida de señal. Las entradas se marcan con un signo negativo (-) y con un

signo positivo (+) para especificar las entradas inversora y no inversora, respectivamente. Una entrada aplicada al terminal no inversor aparecerá con la misma polaridad en la salida; en tanto que una entrada que se aplique al terminal inversor aparecerá invertida en la salida.

Siendo un elemento activo, es necesario un suministro de tensión de alimentación al AmpOp, como se muestra en la Figura 7-5.

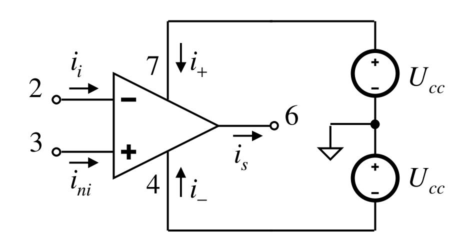


Figura 7-5 Corrientes en un AmpOp

Aunque los suministros de energía se ignoran a menudo en los diagramas de circuito en aras de la simplicidad, no deben pasarse por alto las corrientes de dicho suministro de energía, y por la segunda ley de Kirchhoff resulta:

$$i_s = i_i + i_{ni} + i_+ + i_- \qquad \text{Ec. 7-1}$$

En la Figura 7-6 se presenta un modelo real del circuito equivalente de un AmpOp.

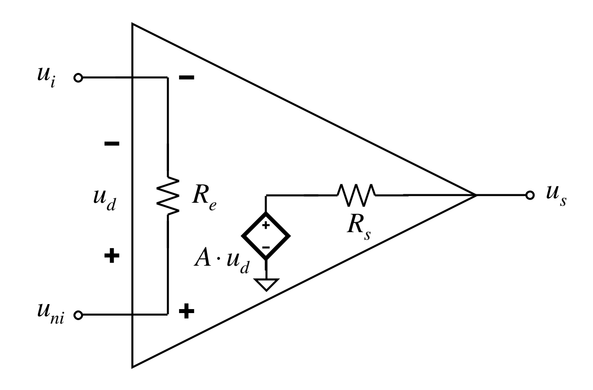


Figura 7-6 Modelo real de un AmpOp

La sección de salida está compuesta por una fuente de tensión controlada por la tensión de entrada al amplificador, en serie con el resistor de salida R_s. Al observar la Figura 7-6, resulta evidente que el resistor de entrada R_e es el que ve la tensión de entrada diferencial; en tanto que el resistor de salida R_s corresponde al de Thevenin visto desde la salida.

La tensión de entrada diferencial u_d está dada por:

$$u_d = u_{ni} - u_i \qquad \text{Ec. 7-2}$$

donde u_1 es la tensión entre el terminal inversor y masa, y u_2 es la tensión entre el terminal no inversor y masa. El AmpOp registra las dos entradas, la multiplica por la ganancia

A y provoca que la tensión resultante aparezca a la salida. De tal manera, la tensión de salida referida a la masa (referencia) del circuito u_s resulta:

$$u_s = A \cdot u_d = A \cdot (u_{ni} - u_i) \qquad \text{Ec. 7-3}$$

el factor A se denomina *ganancia en tensión de lazo abierto* debido a que se trata de la ganancia del AmpOp sin ninguna realimentación externa de la salida a la entrada.

La Tabla 7-1 muestra los rangos de valores típicos que se pueden encontrar de la ganancia en tensión A, la resistencia de entrada R_e, la resistencia de salida R_s y la tensión de alimentación U_{cc}, según los diferentes modelos de amplificador operacional.

Tabla 7-1 Valores de los parámetros del amplificador operacional

Parámetro	Rango de valores	Valores ideales
Ganancia de lazo abierto, A	10^5 a 10^8	∞
Resistencia de entrada, R_e	10^6 a 10^{13} Ω	∞
Resistencia de salida, R_s	10 a 100 Ω	0
Tensión de alimentación, U_{cc}	5 a 24 V	-

Para el amplificador operacional µA741 presentado precedentemente, los valores típicos de R_e, A y R_s son $2M\Omega$, 10^5 y 75Ω, respectivamente.

El concepto de realimentación es crucial para nuestro entendimiento de los circuitos de AmpOp. Una *realimentación negativa* se obtiene cuando una muestra de la señal de salida se aplica al terminal inversor del AmpOp. Cuando hay una realimentación de la salida a la entrada, la proporción entre la tensión de salida y la de entrada recibe el nombre de *ganancia de lazo cerrado*. Como resultado de la realimentación negativa, puede demostrarse que la ganancia de lazo cerrado es casi insensible a la ganancia de lazo abierto A del AmpOp. Por esta razón, los amplificadores operacionales se utilizan en circuitos con realimentación negativa.

A pesar de lo que el término *realimentación negativa* pueda sugerir en una primera instancia, desde el punto de vista de la electrónica una realimentación negativa es sinónimo de estabilidad.

7.2.2 Saturación

Una limitación práctica del AmpOp es que la magnitud de su tensión de salida no puede superar el valor $|U_{cc}|$. En otras palabras, la tensión de salida es dependiente y está limitada por la tensión del suministro de energía eléctrica.

La Figura 7-7 ilustra que es posible operar el AmpOp en tres modos, según la tensión de entrada diferencial u_d.

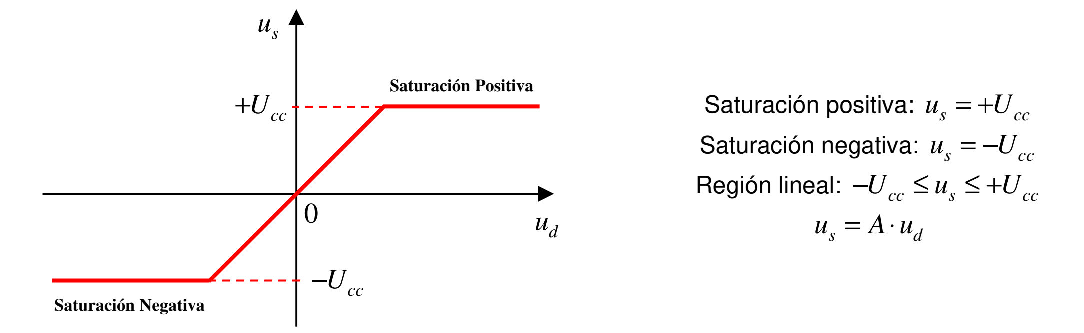


Figura 7-7 Tensión de salida del AmpOp en función de la tensión de entrada diferencial y los tres modos de funcionamiento

Si intentamos incrementar u_d más allá del intervalo lineal, el AmpOp se satura y produce $u_s = +U_{cc}$ o $u_s = -U_{cc}$. A lo largo de este capítulo se supondrá que los amplificadores operacionales operan en el modo lineal. Esto quiere decir que la tensión de salida está restringida por

$$-U_{cc} \leq u_s \leq +U_{cc} \qquad \text{Ec. 7-4}$$

Aunque el AmpOp siempre debe operar en la región lineal, la posibilidad de saturación debe tenerse presente al diseñar cinrcuitos con amplificadores operacionales en la práctica real.

7.3 Amplificador operacional ideal o teórico

Para facilitar el entendimiento de los circuitos con AmpOp supondremos que éstos son ideales. Debe recordarse que un AmpOp es ideal si tiene las siguientes características:

- Ganancia infinita de lazo abierto: $A \to \infty$.
- Resistencia de entrada infinita: $R_e \to \infty$.
- Resistencia de salida cero: $R_s = 0$.

Si bien suponer un AmpOp ideal ofrece sólo un análisis aproximado, los amplificadores más modernos tienen ganancias e impedancias de entrada tan grandes que el análisis aproximado resulta adecuado. A menos que se señale de otra manera, se supondrá a partir de ahora que todo amplificador operacional es ideal.

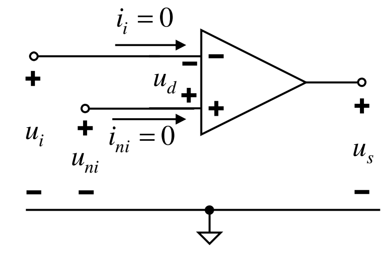


Figura 7-8 Modelo del AmpOp ideal

Para el análisis de circuitos, el AmpOp ideal se ilustra en la Figura 7-8 la cual se obtiene del modelo no ideal de la Figura 7-6. Dos características importantes del AmpOp ideal son:

1- Las corrientes en ambos terminales de entrada son nulas:

$$i_{+} = 0 \qquad \text{e} \qquad i_{-} = 0 \qquad \text{Ec. 7-5}$$

Esto se debe a que la resistencia de entrada es infinita. Esta característica entre los terminales de entrada implica que entre ese par de puntos existe un circuito abierto y que no puede establecerse corriente en dichos terminales del amplificador operacional. Sin embargo, la corriente de salida no necesariamente es nula, según la Ec. 7-1.

2- La tensión de salida es el producto de la ganancia de lazo abierto por la diferencia entre las tensiones de los terminales no inversor e inversor; es decir:

$$u_s = (u_{ni} - u_i) \cdot A \to \infty \qquad \text{pues } A \to \infty \qquad \text{Ec. 7-6}$$

Si bien la conclusión obtenida de Ec. 7-6 puede parecer “inadecuada”, en el ejemplo de la sección 7.4.1 se verá la ventaja de este resultado.

7.4 Configuraciones de circuito elementales de amplificador operacional

Se deben entender como configuraciones de circuito de AmpOp las diferentes combinaciones de elementos pasivos asociadas a un AmpOp que permiten realizar los distintos procesamientos de la señal de entrada (generalmente tensión) con el objeto de obtener la señal de salida deseada.

En las secciones que siguen, se presentarán y analizarán las configuraciones más comunes de AmpOp. El análisis se hará con el detalle necesario y suficiente que permita extender los razonamientos a otro tipo de configuraciones menos comunes.

Debe tenerse siempre presente que en los análisis que siguen, y a menos que se menciones lo contrario, el modelo de AmpOp utilizado será el ideal o teórico, lógicamente funcionando en la región lineal.

7.4.1 Seguidor de tensión

El circuito se representa en la Figura 7-9. Es la configuración más sencilla de AmpOp.

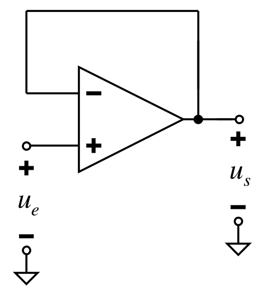


Figura 7-9 Seguidor de tensión

El término “seguidor de tensión” se refiere a que la tensión de la salida del AmpOp “sigue” a la de entrada. En el siguiente análisis se verá qué significa esto.

En particular, este circuito no posee elementos externos al AmpOp en el sentido estricto. Se puede observar en la Figura 7-9 que el terminal de salida se encuentra conectado al terminal inversor mediante un conductor de resistencia nula. La tensión de entrada proveniente de una fuente u_e se aplica al terminal no inversor, respecto de masa (que de acuerdo a lo mencionado, se toma como referencia); mientras que la tensión de salida u_s se mide respecto de dicha referencia.

En estas condiciones, se puede analizar por LKT la malla conformada por u_e, u_d y u_s, resultando:

$$u_e = u_d + u_s \qquad \text{Ec. 7-7}$$

Y recordando que para el AmpOp ideal, $u_s = (u_{ni} - u_i) \cdot A$, queda:

$$u_s = (u_{ni} - u_i) \cdot A = (u_e - u_s) \cdot A = u_e \cdot A - u_s \cdot A \qquad \text{Ec. 7-8}$$

Finalmente, resulta:

$$u_s = u_e \cdot \frac{A}{1+A} \approx u_e \qquad \text{pues } A \to \infty \qquad \text{Ec. 7-9}$$

Vale decir que este circuito reproduce la tensión de entrada en el terminal de salida (por eso se suele referir que la tensión de salida “sigue” a la de entrada).

Aquí hay que detenerse un momento para observar un detalle fundamental para los estudios que siguen. Claramente se ve, en base a lo mencionado en párrafos anteriores, que en este circuito el AmpOp está *realimentado negativamente*. Se puede verificar que en esta condición *la tensión del terminal no inversor coincide con la del terminal inversor*, por lo tanto $u_d = 0$.

Esta conclusión se obtuvo para una configuración sencilla del AmpOp, pero queda como ejercicio para el lector verificarla para cualquier otra configuración de las que se verán más adelante.

Este resultado constituye el concepto que suele denominarse ***cortocircuito virtual***, al cual nos referiremos a menudo durante la resolución de los diferentes circuitos con amplificadores operacionales. Y la denominación es adecuada teniendo en cuenta que *el cortocircuito virtual está conformado por dos puntos que se encuentran a la misma tensión pero entre los cuales no existe corriente*, recordando que en un AmpOp ideal no ingresa corriente por los terminales de entrada.

Aquéllos que recién se inician en el estudio de circuitos, y en particular de los amplificadores operacionales, a menudo se preguntan qué utilidad puede tener esta configuración, en la cual se incorpora un elemento de cierta complejidad para “no cambiar nada” en el circuito. A los fines didácticos es posible usar un burdo ejemplo, como sigue.

Supóngase que se tiene una fuente de tensión real (u_f, R_i), la cual debe aplicarse a una resistencia de carga R_c. La Figura 7-10 muestra el circuito planteado.

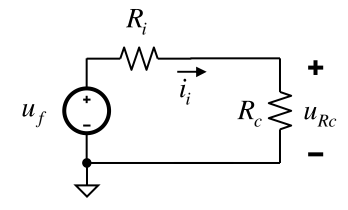


Figura 7-10 Fuente de tensión real aplicada a una carga

Supóngase, además, que el valor de la resistencia de carga es comparable con el valor de la resistencia interna de la fuente, es decir, $R_c \approx R_i$. Por lo tanto, la tensión resultante sobre el resistor de carga vale

$$u_{Rc} = \frac{R_c}{R_i + R_c} \cdot u_f \approx \frac{u_f}{2} \qquad \text{Ec. 7-10}$$

Con lo cual, la tensión sobre el resistor de carga distará sobremanera del valor esperado, que debería ser próximo a u_f.

La incorporación de un AmpOp en configuración seguidor de tensión entre la fuente y la carga, según muestra la Figura 7-11, subsana el inconveniente.

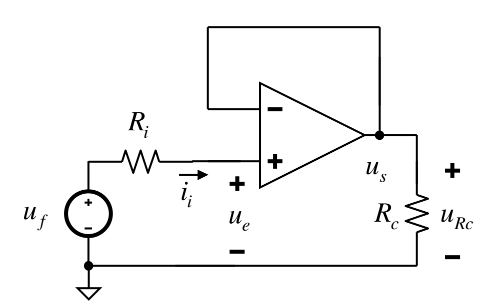


Figura 7-11 Fuente de tensión real aplicada a una carga a través de un seguidor de tensión

Según se observa en la Figura 7-11, al no existir corriente entre la fuente y el AmpOp, no hay tensión sobre R_i, con lo cual la tensión en el terminal no inversor es igual a la de la fuente. A su vez, teniendo en cuenta las características del AmpOp ideal, la tensión de salida de éste resulta igual a la del terminal no inversor, es decir, igual a la tensión de la fuente.

Alcanzado este punto del análisis, es importante indicar un par de cuestiones. Debe quedar en claro que la tensión sobre el R_c se origina porque en la misma se establece una corriente; ningún componente de esta corriente puede provenir del terminal de entrada inversor del AmpOp, sino que la misma debe salir del terminal de salida en su totalidad. Esto explica la necesidad de alimentar el amplificador operacional con fuentes externas de energía. La necesidad de fuentes de ambas polaridades se mostrará en los sucesivos ejemplos que siguen.

Comprendido el funcionamiento del seguidor de tensión, se puede comenzar a analizar algunos circuitos importantes basados en amplificador operacional.

7.4.2 Amplificador inversor

La Figura 7-12 muestra un circuito de AmpOp en configuración *inversora*.

Se puede observar que, además del amplificador operacional, el circuito está compuesto por dos resistores (R_i y R_r), una fuente de tensión como señal de entrada (u_f) y un cortocircuito vinculando la entrada no inversora y el nodo común (masa).

Debe observarse que el resistor R_r vincula la salida con el terminal inversor, dando lugar a una realimentación negativa.

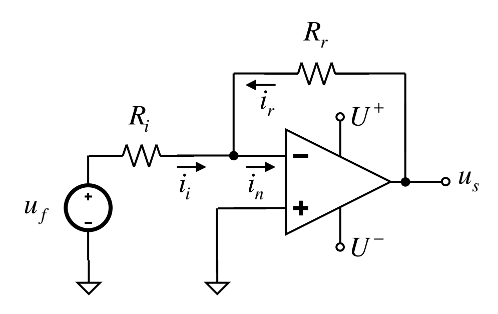


Figura 7-12 Circuito amplificador inversor

El objetivo del presente análisis (y de todo lo que siga de aquí en adelante) es obtener una expresión de la tensión de salida u_s en función de la tensión de fuente, u_f .

Si se aplica la ley de nodos en el terminal inversor del AmpOp, se obtiene:

$$i_i + i_r = i_n \qquad \text{Ec. 7-11}$$

Las corrientes de entrada a los terminales inversor y no inversor son nulas en un AmpOp ideal, por lo tanto $i_n = 0$, resultando

$$i_i = -i_r \qquad \text{Ec. 7-12}$$

Por otra parte, el potencial de dicho nodo es cero, puesto que para el AmpOp ideal realimentado negativamente la tensión entre los terminales inversor y no inversor u_d resulta nula, y este último terminal se encuentra conectado a tierra. Por lo tanto, recorriendo las mallas de entrada y de salida hasta masa de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, respectivamente se tiene:

$$u_f = i_i \cdot R_i \qquad \text{y} \qquad u_s = i_r \cdot R_r \qquad \text{Ec. 7-13}$$

Sustituyendo la Ec. 7-13 en la Ec. 7-12, es posible determinar la tensión de salida en función de la de entrada.

$$u_s = -\frac{R_r}{R_i} \cdot u_f \qquad \text{Ec. 7-14}$$

Se debe observar que la tensión de salida es una réplica invertida y cambiada de escala de la tensión de entrada. La inversión de polaridad de la señal de salida respecto de la de

entrada es, por supuesto, la razón para denominar a este circuito amplificador *inversor*. El factor de escala, o *ganancia de lazo cerrado*, es el cociente R_r/R_i .

Este resultado muestra la necesidad de contar con un fuentes de alimentación de ambas polaridades.

El resultado dado por la Ec. 7-14 sólo es válido si el amplificador operacional mostrado en el circuito de la Figura 7-12 es ideal; es decir; si A es infinita y si la resistencia de entrada R_i es infinita. Para un amplificador operacional práctico la Ec. 7-14 constituye una aproximación usualmente bastante buena.

La Ec. 7-14 es importante porque indica que si la ganancia A del amplificador operacional es grande, la ganancia del amplificador inversor se puede fijar mediante las resistencias externas R_r y R_i. El límite superior de la ganancia (o *factor de amplificación de lazo cerrado*) R_r/R_i está determinado por las tensiones de alimentación y por el valor de la tensión de señal u_f. Si se tienen tensiones de alimentación simétricas, es decir $U^- = -U^+ = U_{cc}$, se obtiene

$$|U_s| \leq U_{cc}$$

$$\left| -\frac{R_r}{R_i} \cdot U_f \right| \leq U_{cc} \qquad \text{Ec. 7-15}$$

$$\frac{R_r}{R_i} \leq \left| \frac{U_{cc}}{U_f} \right|$$

Por ejemplo, si $U_{cc} = 15\,V$ y $u_f = 10\,mV$, el cociente R_r/R_i debe ser inferior a 1500.

En el circuito amplificador inversor mostrado en la Figura 7-12, la resistencia R_r proporciona la conexión de realimentación negativa; es decir, conecta el terminal de salida con el terminal de la entrada inversora. Si se elimina R_r, el camino de realimentación queda abierto y se dice que el amplificador estará operando en lazo abierto. La Figura 7-13 muestra la operación en lazo abierto.

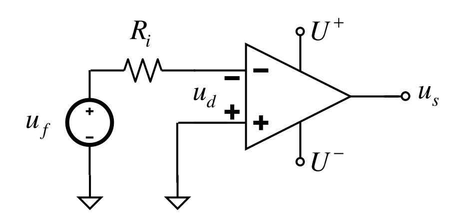


Figura 7-13 Circuito amplificador operando en lazo abierto

La ruptura del camino de realimentación cambia drásticamente el comportamiento del circuito. En primer lugar, la tensión de salida será ahora:

$$u_s = A \cdot u_d \qquad \text{Ec. 7-16}$$

Suponiendo como antes, que $U^- = -U^+ = U_{cc}$, entonces $|u_d| \leq U_{cc}/A$ para poder mantener el sistema en la región de operación lineal. Puesto que la corriente de la entrada inversora es prácticamente igual a cero, entonces la tensión en bornes de R_i es prácticamente cero, luego la tensión de la entrada inversora es casi igual a la tensión de señal u_f. Pero además, debería cumplirse que $u_d \approx u_f$. Por tanto, el amplificador operacional puede funcionar en lazo abierto en el modo lineal sólo si $|u_f| \leq U_{cc}/A$. Si $|u_d| \geq U_{cc}/A$, el AmpOp simplemente se satura. En particular, $u_f < -U_{cc}/A$, el amplificador operacional se satura en $+U_{cc}$ y si $u_f > U_{cc}/A$, el amplificador operacional se satura en $-U_{cc}$. La relación mostrada en la Ec. 7-16 se aplica cuando no hay camino de realimentación, y es por ello que el valor de A se denomina a menudo ganancia en lazo abierto del amplificador operacional.

El mismo razonamiento seguido para el análisis del AmpOp en configuración inversor puede usarse para analizar cualquier otra configuración.

7.4.3 Amplificador sumador

La tensión de salida en un amplificador sumador es una suma cambiada de escala y cambiada de signo de las tensiones aplicadas a la entrada del amplificador. La Figura 7-14 muestra un amplificador sumador con tres tensiones de entrada.

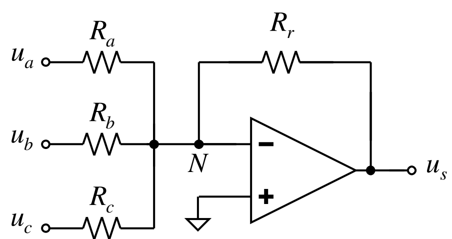


Figura 7-14 Circuito amplificador sumador

La relación entre la tensión de salida u_s y las tres tensiones de entrada u_a, u_b y u_c se puede obtener planteando la LKC en el nodo N, o bien aplicando el principio de superposición; no olvidando las restricciones de tensión y de corriente en la entrada del amplificador operacional ideal.

El resultado obtenido en cualquier caso, es:

$$u_s = -\left(\frac{R_r}{R_a} \cdot u_a + \frac{R_r}{R_b} \cdot u_b + \frac{R_r}{R_c} \cdot u_c \right) \qquad \text{Ec. 7-17}$$

Se deja al lector la demostración de este resultado.

Ahora, si $R_a = R_b = R_c = R_i$, la ecuación anterior se reduce a:

$$u_s = -\frac{R_r}{R_i} \cdot (u_a + u_b + u_c) \qquad \text{Ec. 7-18}$$

Finalmente, si $R_a = R_b = R_c = R_r$, la tensión de salida es la suma, con signo cambiado, de las tensiones de entrada:

$$u_s = -(u_a + u_b + u_c) \qquad \text{Ec. 7-19}$$

Aunque se ha ilustrado el amplificador sumador con sólo tres señales de entrada, la cantidad de tensiones de entrada puede aumentarse según sea necesario. Por ejemplo, pueden sumarse 16 señales de audio grabadas por separado con el fin de formar una única señal. La configuración de amplificador sumador de la Figura 7-14 podría incluir 16 valores de resistencia de entrada distintos, de modo que cada una de las pistas de audio de entrada apareciera en la señal de salida con un factor de amplificación distinto. El amplificador sumador juega, así, el papel de un mezclador de audio.

7.4.4 Amplificador no inversor

La tensión de salida del amplificador no inversor tiene la misma polaridad que la de entrada (de allí su nombre) y el factor de amplificación de lazo cerrado es combinación de los valores de los resistores conectados al terminal inversor.

La Figura 7-15 muestra el circuito amplificador no inversor. La fuente de señal está representada por u_f en serie con R_i (fuente real). Para la determinación de la tensión de salida se aplican las restricciones correspondientes al AmpOp ideal operando dentro de la zona lineal.

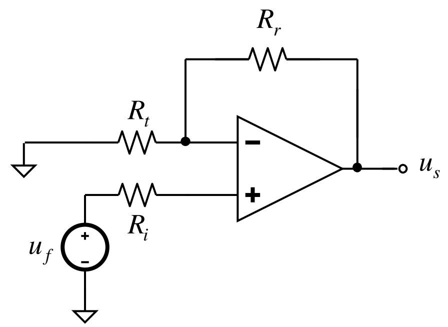


Figura 7-15 Circuito amplificador no inversor

Al igual que antes, el lector debería llegar al siguiente resultado, de acuerdo al análisis planteado:

$$u_s = \frac{R_r + R_t}{R_t} \cdot u_f \qquad \text{Ec. 7-20}$$

También debe observarse que la resistencia interna de la fuente real no aparece en el resultado. Se sugiere al lector justificar esta afirmación.

El mismo resultado debería obtenerse observando que el circuito, desde el punto de vista de la tensión de salida, es un divisor de tensión no cargado (recordar que la corriente de entrada al AmpOp vale cero); y que la tensión de la fuente es la "tensión del divisor", como se ve a continuación:

$$u_f = \frac{R_t}{R_r + R_t} \cdot u_s \qquad \text{Ec. 7-21}$$

7.4.5 Amplificador derivador

El amplificador operacional en configuración derivador, proporciona a la salida una tensión que resulta proporcional la derivada o diferencial de la señal de tensión de entrada. El circuito se muestra en la Figura 7-16.

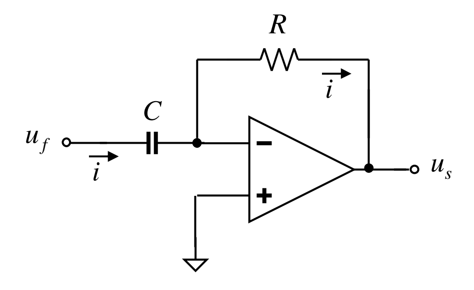


Figura 7-16 Circuito amplificador derivador o diferenciador

Como en todos los casos analizados anteriormente, teniendo en cuenta las restricciones de tensión y corriente en la entrada del AmpOp, la tensión de salida resulta:

$$u_s = -RC\frac{du_f}{dt} \qquad \text{Ec. 7-22}$$

Se propone al lector demostrar la expresión anterior, recordando que la relación fundamental entre la tensión y la corriente en un capacitor se expresa de la siguiente manera:

$$i_c = C\frac{du_c}{dt} \qquad \text{Ec. 7-23}$$

A pesar de que la expresión teórica de la tensión de salida de esta configuración resulta adecuada matemáticamente, este circuito se utiliza muy raramente en la práctica debido a que la operación de derivada de cualquier señal tiende a amplificar los ruidos presentes en la misma (se sugiere al lector ensayar una fundamentación apropiada para esta afirmación).

7.4.6 Amplificador integrador

El amplificador operacional en configuración integrador, entrega en la salida una tensión proporcional a la integral de la señal de tensión de entrada. El circuito se muestra en la Figura 7-17.

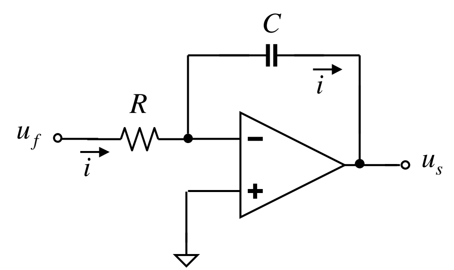


Figura 7-17 Circuito amplificador integrador

De forma similar a los casos ya estudiados, resulta:

$$u_s = -\frac{1}{RC}\int u_f dt \qquad \text{Ec. 7-24}$$

El lector debe poder demostrar la expresión anterior, recordando nuevamente la relación fundamental entre la tensión y la corriente en un capacitor, Ec. 7-23.

7.4.7 Conversor de corriente en tensión

El conversor de corriente en tensión es un circuito muy útil en aplicaciones industriales, debido a la inmunidad al ruido electromagnético que presentan las señales de corriente en comparación con la influencia que aquél genera sobre las señales de tensión. Además, dispositivos electrónicos tales como fotoceldas y tubos fotomultiplicadores, se comportan básicamente como fuentes de corriente con admitancia interna finita pero extremadamente baja.

Una de las ventajas de este tipo de circuitos es que resulta sumamente sencillo de implementar con amplificadores operacionales. La Figura 7-18 muestra un conversor de corriente en tensión con amplificador operacional.

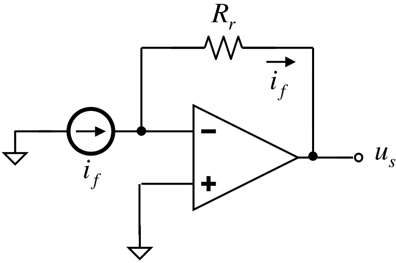


Figura 7-18 Conversor de corriente en tensión con amplificador operacional

Del análisis de este circuito, realizado a partir de las consideraciones tenidas en cuenta en los casos estudiados anteriormente, resulta que:

$$u_s = i_f \cdot R_r \qquad \text{Ec. 7-25}$$

La fuente de corriente, que puede estar representando el modelo de comportamiento de alguno de los elementos mencionados en el primer párrafo de la presente sección, se consideró ideal en la Figura 7-18, puesto que la admitancia interna de la misma es cero. Es importante tener presente que si la fuente de corriente presenta admitancia distinta de cero, la corriente de conversión (que circula por el resistor de realimentación) ya no será exactamente i_f.

7.4.8 Amplificador de carga

Los transductores del tipo piezoeléctrico representan una familia muy común destinada a la medición de fuerza, presión o aceleración. Estos elementos generan una carga eléctrica en respuesta a la deformación (la cual a su vez es provocada por una fuerza externa aplicada), tal como se puede ver en el capítulo 8, *Transductores e Instrumentación*; en donde, además, se menciona que un elemento de este tipo se puede modelar en forma sencilla como una fuente de corriente con una capacitancia en paralelo a modo de admitancia interna. En realidad, dicha fuente de corriente representa la tasa de variación de la carga generada como respuesta a la fuerza externa aplicada; mientras que la capacitancia es consecuencia de la estructura del transductor, consistente en un dieléctrico (cristal piezoeléctrico) colocado entre dos electrodos metálicos, conformando de esta manera un capacitor de placas paralelas.

De esta forma, en la Figura 7-19 se muestra un amplificador de carga cuya fuente de señal tiene las características mencionadas en el párrafo anterior.

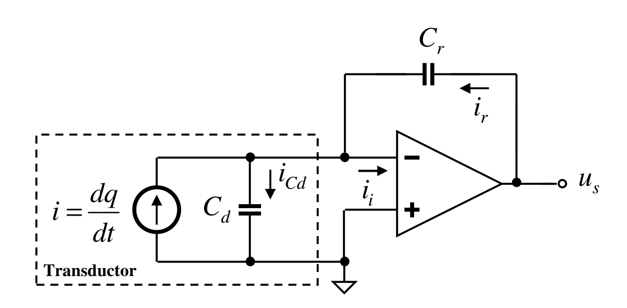


Figura 7-19 Amplificador de carga

El amplificador de carga es básicamente un circuito integrador caracterizado por una impedancia de entrada extremadamente alta; lo cual resulta esencial pues, de otra forma, la carga generada por el transductor se fugaría a masa a través de la entrada del amplificador, considerándose entonces que la corriente de entrada del amplificador es despreciable. Por otra parte, si se supone que la capacitancia del cristal es suficientemente pequeña, la parte de la carga que pudiese desviarse por C_d también sería despreciable. En consecuencia, toda la corriente en el capacitor de realimentación C_r resulta prácticamente igual a la entregada por la fuente:

$$i_r = -i \qquad \text{Ec. 7-26}$$

Además debe observarse que, debido a las hipótesis planteadas para el AmpOp ideal, la tensión sobre el transductor resulta efectivamente igual a cero. Por lo tanto, la expresión de la tensión de salida resulta:

$$u_s = -\frac{1}{C_r} q \qquad \text{Ec. 7-27}$$

Si la magnitud de la carga generada por el piezoeléctrico es proporcional a una deformación x_i, resulta:

$$u_s = -\frac{1}{C_r} K_p x_i \qquad \text{Ec. 7-28}$$

con $q = K_p \cdot X_i$

7.4.9 Amplificador diferencial

La Figura 7-20 presenta un amplificador diferencial constituido a partir de un AmpOp.

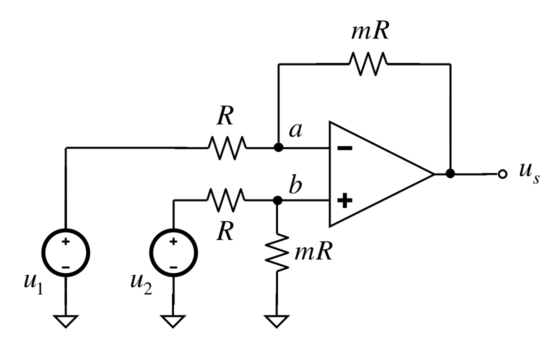


Figura 7-20 Amplificador diferencial

Este tipo de amplificador es una combinación de los amplificadores no inversor e inversor. De hecho, una forma de análisis del mismo se puede efectuar aplicando el principio de superposición.

El lector debería demostrar que la tensión de salida resulta:

$$u_s = m \cdot (u_2 - u_1) \qquad \text{Ec. 7-29}$$

Esta expresión indica que el amplificador diferencial *amplifica* la *diferencia de las dos señales de entrada*.

En la práctica es muy común la necesidad de amplificar la diferencia entre dos señales, que a su vez se encuentran contaminadas por ruido o algún otro tipo de interferencia. En estos casos, el amplificador diferencial suministra una herramienta invalorable para amplificar la señal deseada a la vez que se rechaza el ruido indeseable. Esto se puede visualizar fácilmente a partir de la Figura 7-21.

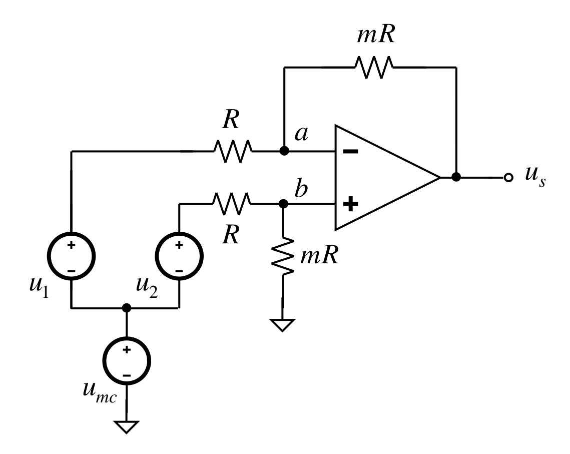


Figura 7-21 Amplificador diferencial con una tensión de “modo común”

Si se supone que el ruido se puede representar con una fuente de tensión U_{MC}, y que además, dicha señal de ruido se suma en forma simultánea a las fuentes de señal deseadas como se muestra en la Figura 7-21 (lo cual ocurre muy frecuentemente en la práctica), es posible demostrar (como ejercicio para el lector) que dicha U_{MC} no aparece en la salida. Es por ello que en estos casos suele hablarse de *señales de modo común* y *señales de modo diferencial*. En consecuencia, una vez demostrado que U_{MC} no aparece a la salida, queda de manifiesto la habilidad del amplificador diferencial de **amplificar sólo las señales de modo diferencial**, mientras que **rechaza las de modo común**.

En los amplificadores reales, el rechazo de las señales de modo común no es completo, por ello suele hablarse de una figura representativa de la calidad de un amplificador diferencial, denominada *relación de rechazo de modo común*. El estudio de esta situación queda fuera de los alcances del presente texto.

7.4.10 Amplificador diferencial y el puente de Wheatstone

En aplicaciones orientadas a la medición, resulta frecuente la combinación de un puente de Wheatstone con un amplificador operacional en configuración diferencial, dado que se puede advertir claramente que la señal de salida de un puente de este tipo es la diferencia de dos señales u_a y u_b, como se observa en la Figura 7-22, en la cual sólo una de las resistencias del puente es variable.

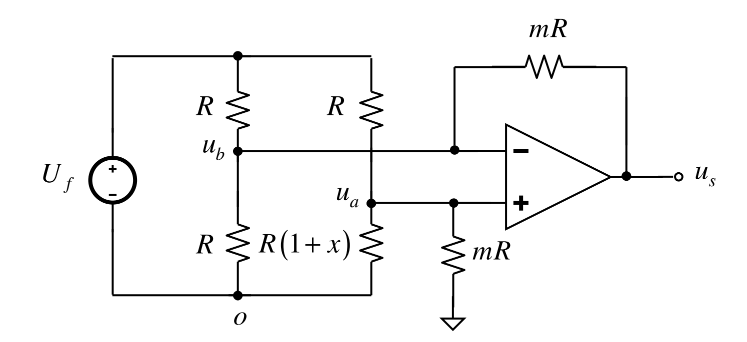


Figura 7-22 Combinación de un puente de Wheatstone y un amplificador diferencial

Es posible analizar este circuito, al igual que el de la sección anterior, aplicando el principio de superposición. Dado que las tensiones u_a y u_b se pueden calcular a partir de los divisores de tensión definidos por las ramas respectivas, y que cada una de dichas tensiones se pueden representar mediante los correspondientes circuitos equivalentes de Thevenin; el circuito de la Figura 7-22 puede transformarse en el de la Figura 7-23.

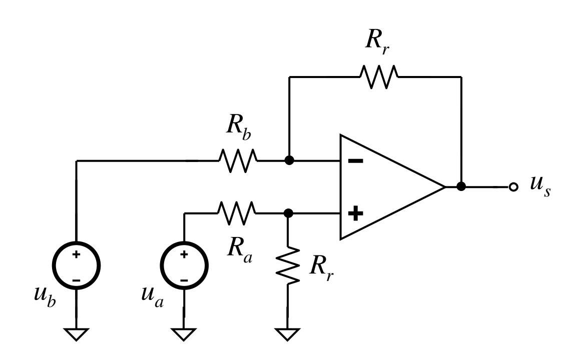


Figura 7-23 Circuito con equivalentes de Thevenin de la combinación de un puente de Wheatstone y un amplificador diferencial

Según se observa en la Figura 7-23, cabe hacer la siguiente pregunta: ¿por qué es posible que la referencia de tensión de las fuentes equivalentes de Thevenin sea la misma que la del resistor R_r conectado al terminal no inversor del AmpOp, es decir *el potencial de masa*?

Dado que en la Figura 7-22 la tensión del punto o es común tanto a u_a como a u_b, y dado que no es posible asignar un valor fijo de tensión a dicho punto (puede ser que dicho valor no sea conocido), es razonable pensar que la tensión del punto o es de *modo común*, de acuerdo a lo expresado.

Siendo así, la tensión del punto o es *rechazada* por la configuración diferencial y no aparece a la salida del amplificador. Por lo tanto, el dibujo del circuito de la Figura 7-23 es válido.

Resta sólo determinar los valores de u_a, u_b, R_a y R_b; cuyo cálculo queda como ejercicio para el lector. Los valores resultan:

$$u_a = \frac{(1+x)}{(2+x)} \cdot u_f \qquad \text{Ec. 7-30}$$

$$u_b = \frac{u_f}{2} \qquad \text{Ec. 7-31}$$

$$R_a = \frac{(1+x)}{(2+x)} \cdot R \qquad \text{Ec. 7-32}$$

$$R_b = \frac{R}{2} \qquad \text{Ec. 7-33}$$

Se puede observar que las resistencias de Thevenin no resultan iguales; esto podría dar origen a algún inconveniente, dado que el amplificador diferencial requiere que los resistores conectados a los terminales inversor y no inversor sean iguales, de acuerdo a lo ya analizado en la sección 7.4.9 De cualquier modo, se continuará el presente análisis, con lo cual resulta:

$$u_s = \frac{x}{(2+x)(1+x)\cdot\frac{R}{R_r}+(2+x)} \cdot \frac{R_r}{R} \cdot U_f \qquad \text{Ec. 7-34}$$

Se observa que la tensión de salida del amplificador diferencial es función de U_f, R, R_r y x, con el inconveniente que la dependencia respecto de x no es lineal, algo deseable por simplicidad.

También se puede observar que si los valores de x son pequeños, es decir que si el rango de variación de la resistencia variable es suficientemente acotado se tiene:

$$u_s \approx \frac{R_r}{2R} \cdot \frac{x}{\left(1+\frac{R}{2R_r}\right)} \cdot U_f \qquad si\ x << 1 \qquad \text{Ec. 7-35}$$

Cumpliendo la aproximación indicada, se logra linealidad entre u_s y x.

Una configuración muy utilizada se basa en un puente en el cual las cuatro resistencias varían simultáneamente y en la misma magnitud. En esta situación se puede realizar un análisis similar al anterior, pero teniendo en cuenta que las cuatro resistencias varían según el circuito de la Figura 7-24.

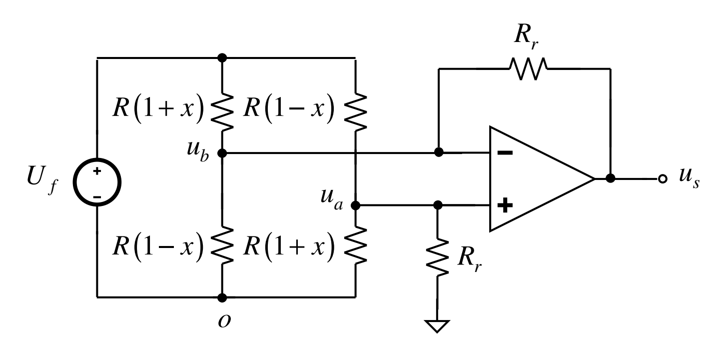


Figura 7-24 Puente de Wheatstone con cuatro resistencias variables y un amplificador diferencial

Este es el caso de los transductores de presión resistivos que se estudian en detalle en el capítulo 8, *Transductores e Instrumentación*. Estos elementos se construyen especialmente

para que cumplan con la función específica de comportarse como un puente de Wheatstone en el cual las cuatro resistencias varían como se indica en la Figura 7-24.

Los correspondientes resultados, a demostrar por el lector, se indican a continuación:

$$u_a = \frac{U_f}{2} \cdot (1+x) \qquad \text{Ec. 7-36}$$

$$u_b = \frac{U_f}{2} \cdot (1-x) \qquad \text{Ec. 7-37}$$

$$R_a = R_b = \frac{R}{2} \qquad \text{Ec. 7-38}$$

$$u_s = \frac{2R_r}{R} \cdot U_f \cdot x \qquad \text{Ec. 7-39}$$

Como se puede observar al efectuar la demostración de estos resultados, no es necesario realizar aproximaciones para determinar el valor final de u_s, por lo cual la linealidad entre la tensión de salida y x se obtiene directamente.

7.5 Comentarios finales

A lo largo el presente capítulo se analizaron diferentes configuraciones del amplificador operacional, siempre teniendo en cuenta el modelo ideal de este último.

Para finalizar el estudio de los amplificadores operacionales, se propone a modo de ejemplo efectuar el análisis del circuito seguidor de tensión (la configuración más simple de las vistas), pero utilizando un modelo un poco más realista del AmpOp.

En la Figura 7-25 se representa el circuito seguidor de tensión, pero utilizando el modelo real del AmpOp visto en la Figura 7-6.

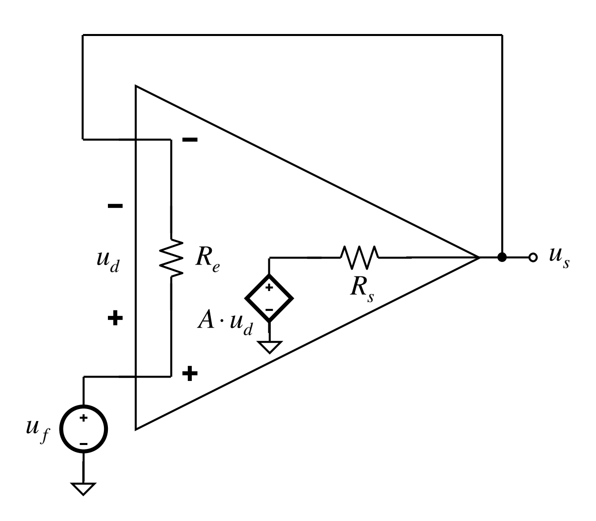


Figura 7-25 Circuito seguidor de tensión asociado al modelo real del AmpOp

Para simplificar el análisis, se puede redibujar el circuito según la Figura 7-26.

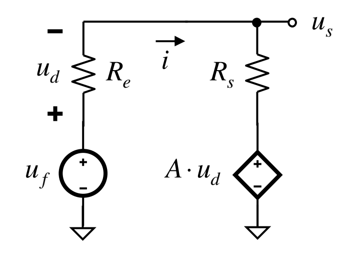


Figura 7-26 Circuito simplificado del seguidor de tensión asociado al modelo real del AmpOp

Planteando la tensión u_s por los dos caminos posibles (rama izquierda y rama derecha, respectivamente) resulta:

$$u_s = u_f - u_d = u_f - i \cdot R_e \qquad \text{Ec. 7-40}$$

$$u_s = i \cdot R_s + A \cdot u_d = i \cdot R_s + A \cdot i \cdot R_e \qquad \text{Ec. 7-41}$$

De la Ec. 7-41 se puede despejar la corriente i :

$$i = \frac{u_f - u_s}{R_e} \qquad \text{Ec. 7-42}$$

que, reemplazada en la Ec. 7-40 y luego de resolver, permite obtener u_s en función de u_f como muestra la Ec. 7-43.

$$u_s = u_f \frac{\left(\frac{R_s}{R_e} + A\right)}{\left(1 + \frac{R_s}{R_e} + A\right)} \qquad \text{Ec. 7-43}$$

Esta expresión muestra cierta complejidad y difiere bastante de la analizada en la sección 7.4.1 del presente capítulo. Pero teniendo presente los valores teóricos de R_s, R_e y A, o aún los valores reales de un AmpOp comercial, se pueden efectuar aproximaciones con los criterios que se indican a continuación.

R_s es muy pequeña (teóricamente $R_s = 0$) con relación a R_e (teóricamente $R_e \to \infty$), con lo cual el cociente R_s / R_e es prácticamente nulo, con lo que resulta:

$$u_s = u_f \cdot \frac{A}{(1 + A)} \qquad \text{Ec. 7-44}$$

Por otra parte, dado que A es mucho mayor que 1 (teóricamente $A \to \infty$), el cociente $\frac{A}{(1+A)}$ resulta prácticamente igual a 1 y $u_s = u_f$, resultado que coincide con el de la sección 7.4.1.

Estos criterios pueden aplicarse a cualquier análisis de circuitos con amplificadores operacionales, invitándose al lector a resolver los circuitos analizados utilizando el circuito real

del AmpOp, y finalmente realizar las aproximaciones correspondientes, verificando los resultados de la sección 7.4.

7.6 Referencias bibliográficas

"Operational Amplifiers - Design and Applications"; L. G. Graeme, G. E. Tosey, L. P. Huelsman. McGraw-Hill Book Company.

"Transducer interfacing handbook. A guide to analog signal conditioning". Editado por D. H. Sheingold. Publicado por Analog Devices Inc.

CAPÍTULO 8
Transductores e instrumentación

En la mayoría de los procesos industriales es habitual la utilización de sensores con el fin de monitorear la evolución de los parámetros de dichos procesos.

Magnitudes tales como presión, temperatura, caudal, nivel, entre otras; son variables que comúnmente se registran y procesan en una planta petroquímica, por ejemplo.

Resulta común medir esfuerzo y deformación durante ensayos de determinación de resistencia de materiales, o a veces es necesario controlar las mencionadas variables para verificar el estado de estructuras civiles (puentes, edificios).

La utilización de transductores asociados a sistemas de medición y aún a sistemas de control, es hoy en día imprescindible; sobre todo en procesos de mediana o alta complejidad.

Este capítulo no pretende cubrir todos los aspectos relacionados con los transductores y la instrumentación, ni mucho menos. La variedad de transductores existente es tan vasta como su campo de aplicación. Los autores sólo aspiran a que el material expuesto sirva de base e inspiración a las inquietudes de los lectores y que, en todo caso, sea la filosofía que domina al tema lo que prevalezca para que cada individuo pueda enfrentar sus propios desarrollos con otros elementos no presentados aquí, pero siempre en base a las herramientas básicas expuestas.

En las secciones que siguen se presentan algunas definiciones y se repasan especialmente conceptos asociados al circuito puente de Wheatstone, de amplia aplicación en el tema desarrollado en el presente capítulo; para luego atacar de lleno el estudio de algunos transductores y sus aplicaciones.

8.1 Definiciones

Según la bibliografía que se consulte, se habla de *transductor* o de *sensor* en forma indistinta. En otros casos, se los trata como si fueran dispositivos diferentes, dándose para cada uno de ellos una definición que termina resultando más o menos similar. Algunas de ellas son las siguientes:

<u>Transductor</u>

Elemento que convierte un tipo de energía en otro. Generalmente esta definición se puede aplicar a cualquier dispositivo conversor de energía; pero en particular, *transductor* identifica a aquellos conversores que manejan señales con información.

<u>Sensor</u>

Dispositivo capaz de detectar magnitudes físicas o químicas, llamadas *variables de instrumentación*, y transformarlas en variables eléctricas.

Como se anticipó, se puede observar que dichas definiciones son bastante parecidas, al menos en lo que respecta a las incumbencias de este capítulo. Por lo tanto, para nosotros serán sinónimos. El lector podrá apreciar a lo largo de la lectura del presente texto, cuál de las definiciones se adapta mejor a cada uno de los dispositivos estudiados.

<u>Clasificación de los transductores:</u>

Una clasificación bastante extendida divide a los transductores en *activos* y *pasivos*. Los primeros generan energía eléctrica a partir de la magnitud física que actúa sobre ellos; los segundos necesitan una fuente de energía eléctrica externa para poner de manifiesto las variaciones de las magnitudes que detectan.

<u>Sistemas de instrumentación</u>

La *instrumentación* en general, trata los sistemas integrados cuya finalidad es medir magnitudes físicas de un sistema externo, elaborar la información asociada a ellas y presentarla a un operador.

Los sistemas electrónicos de medición están compuestos por sensores, circuitos especiales para el tratamiento de las señales, instrumentos y sistemas de registro; los cuales se vinculan para llevar a cabo una función general de medición. Si bien, la palabra *instrumentación* corresponde a una denominación histórica, dado que antiguamente los datos eran presentados en un *panel de instrumentos*; en el presente se continúa empleando el término en forma general, aún cuando la tecnología actual permite la digitalización, almacenamiento y actuación sobre el proceso mediante la utilización de computadoras. Por ejemplo, el monitoreo de una magnitud (digamos, presión) puede requerirse momento a momento. La señal proveniente del sensor debe ser *acondicionada* o *conformada* (tratamiento de la señal), a los fines de adaptarse al sistema de registro o visualización. Por lo tanto, el *sensor*, el *conformador* de la señal, y el *sistema de registro o visualización*, configuran el *sistema de instrumentación*.

La Figura 8.1 muestra un sistema típico de instrumentación en el cual se destacan los principales componentes: sensor, conformador y sistema de registro. Se incluye, además un lazo de realimentación para el caso que el sistema deba actuar sobre el proceso.

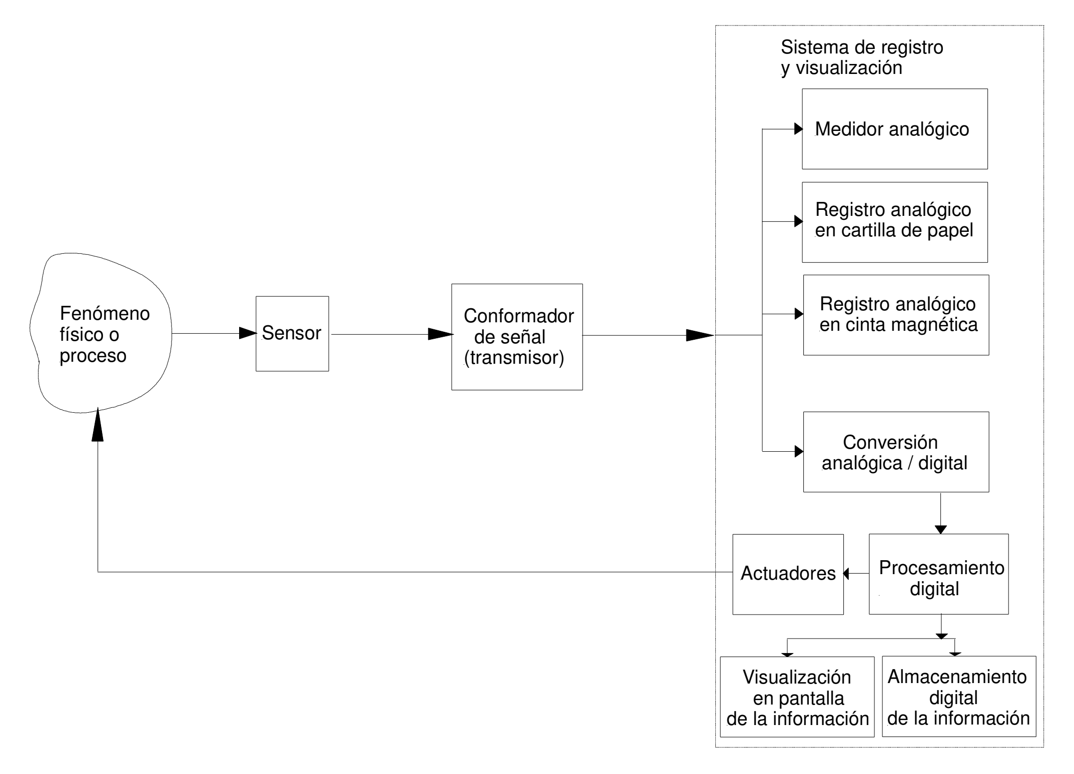


Figura 8-1 Sistema de instrumentación

Muchos sistemas de instrumentación actuales están basados en una computadora, la cual resuelve todos los aspectos relativos al procesamiento y registro de la señal y a la transferencia y presentación de la información. A estos sistemas se los suele llamar *instrumentación inteligente*.

La principal diferencia entre un equipo de instrumentación convencional y uno inteligente es que, mientras en el convencional los datos de medida son generados uno a uno y deben ser visualizados e interpretados por el operador, en la instrumentación inteligente se puede registrar grandes cantidades de información de forma automática y luego presentarla de forma integrada y amigable al operador.

Acondicionamiento o conformación de la señal

Forma parte del tratamiento de la señal con el objeto de realizar el registro y visualización de la información y para la actuación sobre el proceso; incluye todas aquellas transformaciones que deben realizarse sobre señales eléctricas que resultan en la salida del transductor, y que son previas su procesamiento, que se realiza para extraer la información que se mide o evalúa.

Existen un par de razones por las que las señales de salida del transductor deben ser acondicionadas:

1. Cuando, debido a las características del tipo de transductor, la señal proporcionada no sea una tensión, se utiliza un conversor que adapte el tipo de señal de que se trate a tensión.

Así, en transductores resistivos es normal que se utilice un circuito puente para convertir el valor de resistencia a tensión.

Cuando el transductor es de tipo capacitivo o inductivo, éste se suele montar como parte de un oscilador, siendo la magnitud de salida una frecuencia, por lo cual debe utilizarse un conversor de frecuencia a tensión.

2. La señal debe ser acondicionada para incrementar la relación señal/ruido hasta niveles adecuados. Esto tipo de acondicionamiento implica:
   - Amplificar las señales hasta niveles que sean suficientemente mayores al nivel de ruido eléctrico aleatorio.
   - Filtrar las señales para eliminar ruidos introducidos por interferencia eléctrica.
   - Cuando el procesamiento de la señal es digital, el acondicionamiento corresponde a la conversión analógica/digital.

Procesamiento de la señal

Incluye el conjunto de transformaciones a que debe ser sometida la señal eléctrica a fin de extraer de ella la información que se busca.

El procesamiento de la señal suele implicar la realización operaciones muy diversas, ya sean lineales, no lineales; la composición de múltiples señales o el tratamiento digital de las mismas.

Registro de la señal

Consiste en el almacenamiento permanente o temporal de las señales para su posterior análisis o supervisión. Esta operación es necesaria si el flujo de información que se adquiere supera la capacidad de procesamiento de que se dispone.

El método tradicional de registro se ha basado en gráficos sobre cartillas de papel y luego en grabación de cintas magnéticas, ya sea a través de formatos analógicos o utilizando codificación digital. Actualmente los métodos de registro están basados en computadoras, y el soporte en que se almacena la información es cualquiera de los sistemas de memoria masiva de que disponen estos equipos (memoria de estado sólido, discos, disketes, cinta magnética, etc.).

Telemetría

Muchas veces las señales son adquiridas en puntos remotos, de difícil acceso o con condiciones ambientales hostiles; haciéndose necesario mantener aislados los sistemas sensores y los equipos de procesamiento y presentación o registro. En estos casos las señales deben transmitirse entre la la fuente y el sistema de procesamiento mediante un canal de comunicación (línea telefónica, enlace de radio, etc). Para adaptar las señales a las características de canal de comunicación es necesario introducir procesos de modulación, demodulación o codificación apropiados.

Actuación

En el caso de ser necesaria la intervención del sistema para realizar el ajuste de algún parámetro del proceso, la información brindada por diferentes sensores es procesada por el sistema de instrumentación. La misma, además de ser visualizada y registrada, puede ser utili-

zada para tomar decisiones en forma manual (instrumentación *tradicional*) o automática (instrumentación *inteligente*) respecto de la actuación sobre el proceso, produciendo la apertura y cierre de válvulas, arranque o parada de bombas o motores, etc.

Sistemas 4-20 mA

Dada la existencia de ruidos electromagnéticos de importancia en el ambiente industrial, y con el objeto de minimizar su incidencia en las señales (provenientes de las mediciones o enviadas a los actuadores), es común la utilización de *lazos de corriente* para la transmisión de la información. El rango que se utiliza más habitualmente es el denominado *4-20 mA*, donde el valor 20 mA corresponde al fondo de escala y 4 mA a la ausencia de información. Se ha convenido que el valor mínimo sea distinto de cero, para evitar ambigüedades en el caso de fallas (si la corriente mínima fuese cero, no podríamos discernir una falla en el sistema respecto de un valor de señal realmente cero).

Los lineamientos y especificaciones de este sistema de señalización industrial se encuentran documentados en la norma *ANSI/ISA-50.1-1982 (R1992) "Compatibility of Analog Signal for Electronic Industrial Process Instruments"*.

8.2 Puente de Wheatstone

El estudio de este circuito se hace imprescindible, dada la importancia del mismo en aplicaciones relacionadas con transductores.

Sea la Figura 8-2:

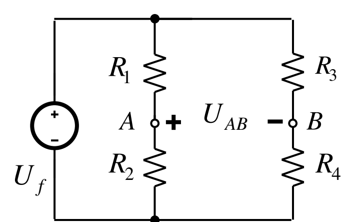


Figura 8-2 Puente de Wheatstone

Las resistencias de los resistores de las cuatro ramas son nominalmente iguales. La tension en R_2 y en R_4 valen, respectivamente:

$$U_{R_2} = \frac{U_f}{R_1 + R_2} R_2 \qquad \text{Ec. 8-1}$$

$$U_{R_4} = \frac{U_f}{R_3 + R_4} R_4 \qquad \text{Ec. 8-2}$$

Por lo que a tensión entre A y B resulta:

$$U_{AB} = U_{R_4} - U_{R_4} = U_f \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \qquad \text{Ec. 8-3}$$

Si $U_{AB} = 0$ el puente está en equilibrio y resulta

$$\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{R_4}{R_3+R_4} \qquad \text{Ec. 8-4}$$

luego $R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 = R_1 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_4$

y finalmente

$$R_2 \cdot R_3 = R_1 \cdot R_4 \qquad \text{Ec. 8-5}$$

Se observa que el equilibrio es independiente de U_f. Si la resistencia de una de las ramas varía, se rompe el equilibrio y $U_{AB} \neq 0$.

A continuacion, se estudiarán diversos casos de interés.

Caso 1

Si sólo varía una de las resistencias del puente (supongamos, la de la rama 2) en un factor $x=\frac{\Delta R}{R}$, o sea que el nuevo valor de dicha resistencia es $R_2 \cdot (1+x)$, se tiene:

$$U_{AB}=\frac{U_f}{4}\frac{x}{\left(1+\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{Ec. 8-6}$$

Esta relación no es lineal. Pero si $x \ll 1$, se puede efectuar la siguiente aproximación:

$$U_{AB} \approx \frac{U_f}{4}x \qquad \text{Ec. 8-7}$$

En donde ahora U_{AB} es directamente proporcional a x, a través del factor $U_f/4$. De cualquier modo, la importancia en la elección del valor de U_f radica en que la *sensibilidad* del puente depende de dicha tensión de alimentación.

Caso 2

Si ahora varían las resistencias de las ramas **2** y **3** en un factor x, se tiene:

$$U_{AB}=\frac{U_f}{2}\frac{x}{\left(1+\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{Ec. 8-8}$$

y, como antes, si $x \ll 1$:

$$U_{AB} \approx \frac{U_f}{2}x \qquad \text{Ec. 8-9}$$

Con lo cual se puede observar que la sensibilidad del puente se duplicó respecto del caso anterior.

Caso 3

Finalmente, si varían las cuatro resistencias, pero las de las ramas **2** y **3** en un factor $+x$ y las de las ramas **1** y **4** en un factor $-x$, se tiene:

$$U_{AB} = U_f \cdot x \qquad \text{Ec. 8-10}$$

Donde la relación resulta lineal independientemente de la variación de x, volviéndose a duplicar la sensibilidad respectro del valor del caso anterior.

8.3 Transductores

8.3.1 Desplazamiento

Potenciométrico

Consiste en un resistor variable. Se pueden medir tanto desplazamientos lineales como angulares, en función del tipo de resistor utilizado. La Figura 8-3, muestra el esquema de un transductor potenciométrico para medir desplazamientos lineales y angulares, y su circuito equivalente.

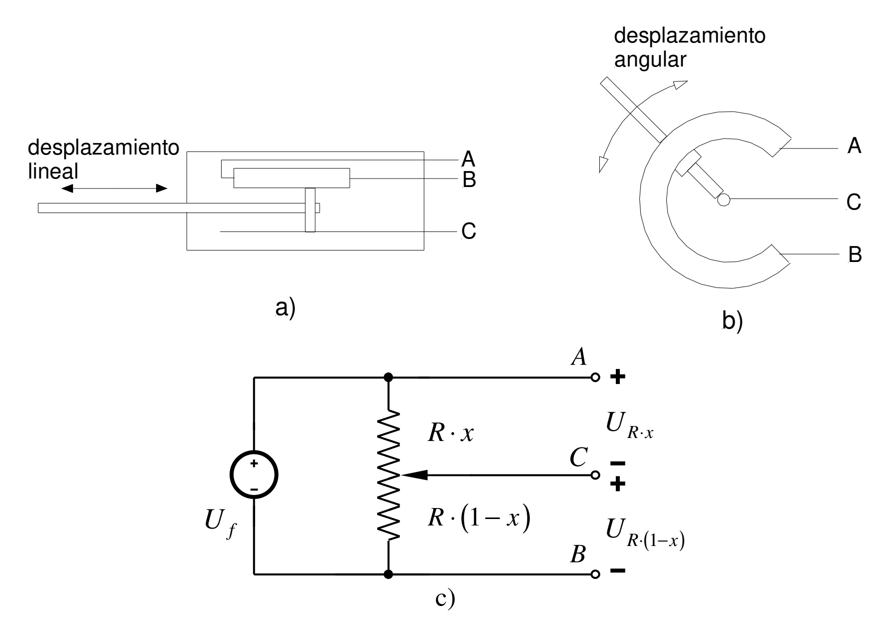


Figura 8-3 Transductor de desplazamiento potenciométrico: a) Esquema del dispositivo para desplazamiento lineal; b) Esquema para desplazamiento angular; c) Circuito

Evidentemente, cualquiera de las dos tensiones proporcionadas por el divisor se puede utilizar como resultado de la medición (U_{Rx} o $U_{R(1-x)}$):

$$U_{Rx} = U_f \cdot x \qquad \text{Ec. 8-11}$$

$$U_{R(1-x)} = U_f \cdot (1-x) \qquad \text{Ec. 8-12}$$

La tensión de la fuente debe ser muy estable para no influir en la medición.

Transformador diferencial variable lineal o LVDT (Linear Variable Differential Transformer)

La Figura 8-4 muestra un esquema de transductor de desplazamiento lineal del tipo LVDT y un gráfico de la tensión de salida en función de la posición del núcleo.

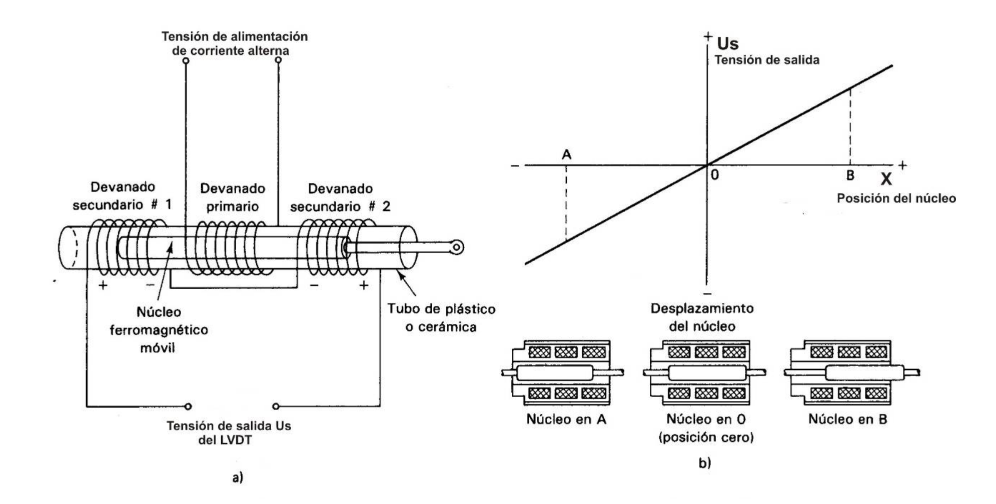


Figura 8-4 Transformador diferencial variable lineal: a) esquema; b) tensión de salida en función de la posición del núcleo del LVDT

Los secundarios son idénticos y están devanados en serie y en oposición entre sí, con lo que el acoplamiento entre el primario y cada secundario resulta igual.

La tensión de la fuente debe presentar alta estabilidad de amplitud y frecuencia. Valores típicos están comprendidos entre 1 a $10\,\mathrm{V}$ y 1 a $10\,\mathrm{kHz}$, respectivamente.

La *linealidad* se define como

$$L\% = \frac{\Delta U_{s_{máxima}}}{U_{s_{máxima}}} 100 \qquad \text{Ec. 8-13}$$

que representa la desviación máxima de la curva de salida respecto de la recta de mejor ajuste que pase por el origen, expresada como un porcentaje de la salida nominal.

La Figura 8.5 muestra la característica tensión de salida vs. desplazamiento real (no lineal) comparada con la característica nominal (lineal).

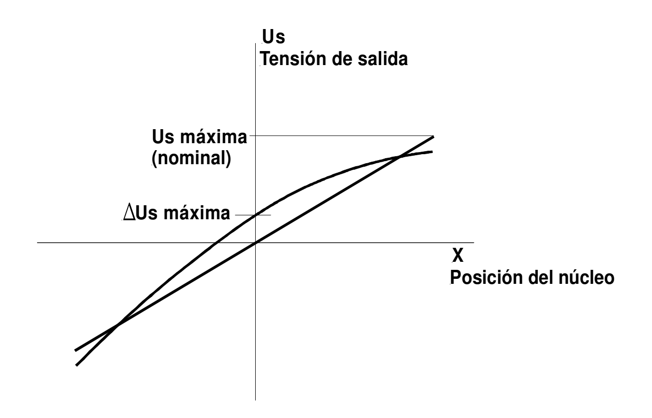


Figura 8-5 Parámetros de la característica no lineal del LVDT

Como se observa, conviene que L sea lo más baja posible. Desde este punto de vista, sería mejor hablar de *alinealidad*.

Si se escribe la expresión de la tensión de salida en función del desplazamiento, la misma dependerá de la tensión de alimentación del primario y un factor denominado *sensibilidad*, obteniéndose:

$$U_s = S \cdot U_f \cdot x \qquad \text{Ec. 8-14}$$

Si U_s se mide en $[\mathrm{mV}]$, U_f en $[\mathrm{V}]$ y x en $[\mu\mathrm{m}]$; la unidad de S resulta $\left[\dfrac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{V}\cdot\mu\mathrm{m}}\right]$.

Una de las variadas aplicaciones del LVDT es en acelerómetros, disponiendo el LVDT de la forma que se muestra en la Figura 8-6.

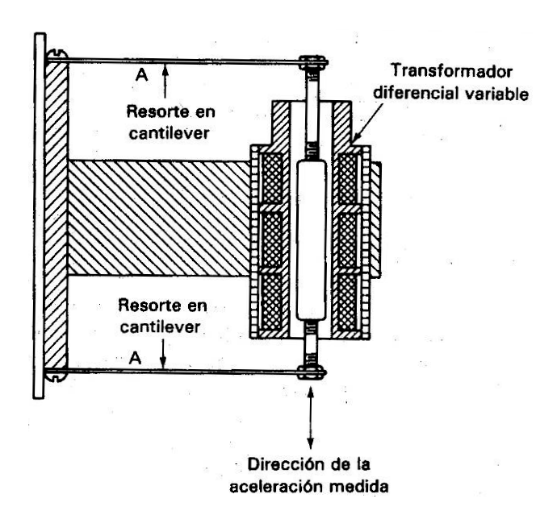


Figura 8-6 Acelerómetro tipo LVDT

8.3.2 Esfuerzo y deformación

Cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo, éste se deforma. Si las deformaciones no son permanentes y la fuerza aplicada se retira, el cuerpo retoma su forma original. Es en este rango, zona elástica, en el cual es posible aplicar la Ley de Hooke, que establece una relación lineal entre las tensiones o esfuerzos y las deformaciones soportados por un cuerpo, de acuerdo al gráfico de la Figura 8-7.

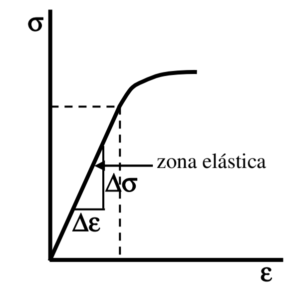


Figura 8-7 Esfuerzo vs. deformación

donde $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{mm}}\right]$ es la deformación y $\sigma = \frac{F}{A} = \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}\right]$. Además $E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ es el módulo de Young, válido para la zona elástica.

Más allá de dicho rango las deformaciones son permanentes y el cuerpo no recupera su forma original.

Una familia de elementos muy utilizados en la medición de esfuerzos y deformación corresponde a la de la *galgas extensiométricas*.

Galgas extensométricas

Son elementos cuya resistencia eléctrica varía en función de pequeños cambios en la geometría de los materiales que componen el resistor (se debe recordar la expresión $R = \rho\frac{l}{A}$) y se construyen de tal forma que dicha variación sea lineal con la deformación.

Esos elementos van adheridos a la superficie del material bajo prueba, formando un conjunto solidario.

Los tipos más difundidos son las galgas metálicas y las semiconductoras. Las primeras se construyen en base a aleaciones de níquel con cobre o cromo, mientras que las segundas están constituidas por semiconductores (fundamentalmente silicio) con un grado de contaminación adecuado. Estas últimas son más sensibles a los cambios de longitud (50 ó 60 veces respecto de las metálicas), pero también son más sensibles a los cambios de temperatura.

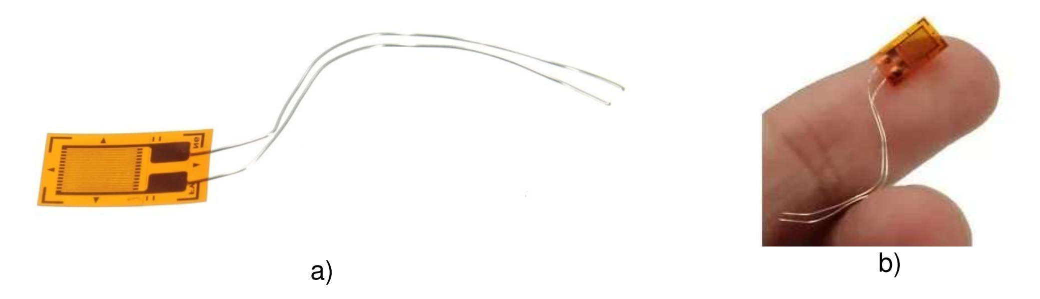


Figura 8-8 Galgas extensométricas metálicas: a) detalle; b) comparación de tamaño

En cualquier caso, se define el factor de la galga como indica la Ec. 8-15.

$$k = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{x}{\varepsilon} \qquad \text{Ec. 8-15}$$

con $x = \frac{\Delta R}{R}$ y $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

La Tabla 8-1 compara diferentes características de las galgas metálicas y semiconductoras.

Tabla 8-1 Características de las galgas

Característica \ Tipo de galga	Metálicas	Semiconductoras
Precisión [%]	0,1	1
Factor	2	50 a 200
Alargamiento [µm/m]	20.000 x 10^{-6}	5.000 x 10^{-6}
Resistencia nominal [Ω]	120; 350; 600; 1.000	120

Según el tipo de esfuerzo a medir, se encuentran en diferentes disposiciones (lineales, radiales, tangenciales, combinaciones de ambas, etc.). La Figura 8-9 muestra algunos tipos de galga.

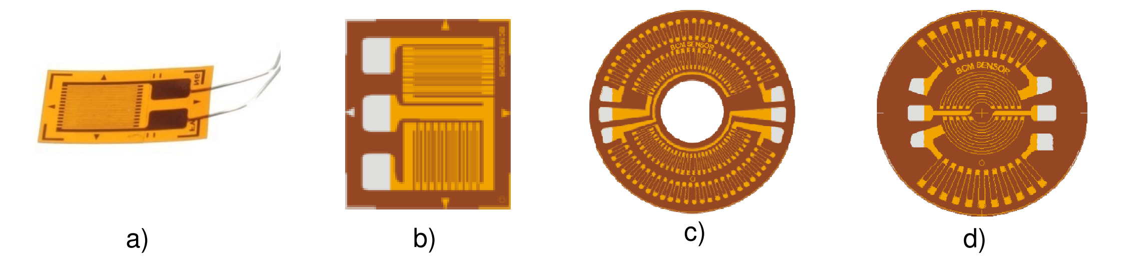


Figura 8-9 Tipos de galgas según el esfuerzo a medir: a) lineal; b) lineal combinada; c) radial; b) combinada radial-tangencial

Aplicación

Estos elementos se utilizan adecuadamente como parte integrante en circuitos tipo puente de Wheatstone. El caso de aplicación más simple se muestra en la Figura 8-10.

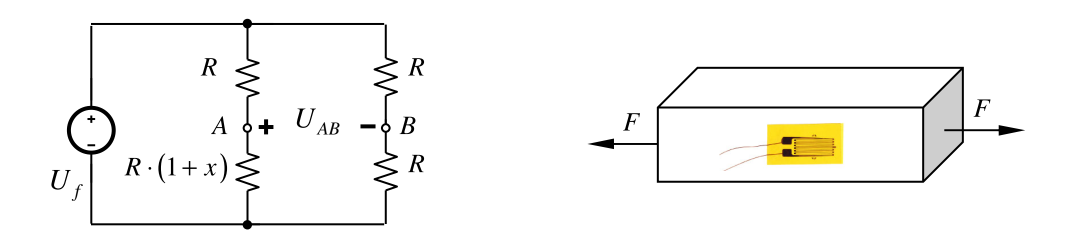


Figura 8-10 Aplicación de una galga extensométrica utilizando un puente de Wheatstone

Recordando las Ec. 8-6 y Ec. 8-15, teniendo en cuenta que x es una fracción de R, y sin olvidar que $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, se tiene:

$$U_{AB} = \frac{U_f \cdot x}{4\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{U_f \frac{\Delta R}{R}}{4+2\frac{\Delta R}{R}} = \frac{U_f \cdot k \cdot \varepsilon}{4+2\cdot k\cdot \varepsilon} \approx \frac{U_f \cdot k \cdot \varepsilon}{4} \qquad \text{Ec. 8-16}$$

La aproximación es válida siempre que se cumpla $k\cdot\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = x = \; 1$.

Aumento de la sensibilidad

Se puede aumentar la sensibilidad del sistema en estudio con la inclusión de una galga adicional en la probeta bajo ensayo, la cual se conecta a la rama del puente opuesta a la galga original, como se ve en la Figura 8-11.

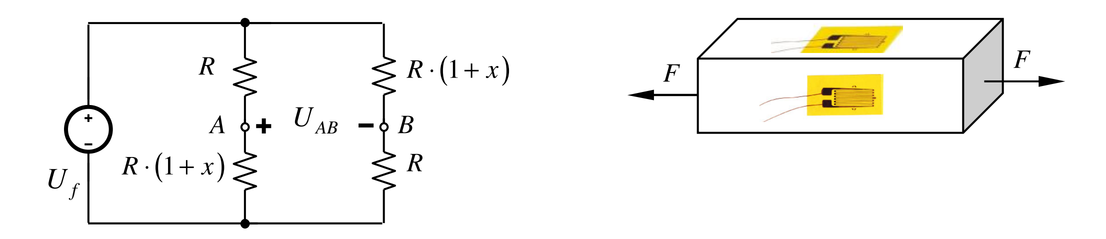


Figura 8-11 Aumento de la sensibilidad agregando una galga adicional

Dado que el equilibrio del puente se consigue a partir de la Ec. 8-5, si las resistencias que se encuentran del mismo lado del signo igual varían en la misma cantidad, el desequilibrio resulta el doble del primer caso, con lo cual se duplica la sensibilidad.

Esto también se verifica matemáticamente mediante la expresión de la tensión de desequilibrio del puente para dos resistores variables correspondiente a la Ec. 8-9.

Compensación por variaciones de temperatura

Se puede realizar la compensación de la medición cuando la resistencia de la galga es afectada por variaciones de temperatura.

Durante un ensayo en el cual la probeta se deforma, dicha deformación puede provocar alteraciones en la temperatura de la pieza, en cuyo caso también es probable que la galga aumente su temperatura, modificando el valor de su resistencia eléctrica, lo cual influirá en el resultado de las mediciones.

Una forma de contrarrestar dicho efecto es instalando una galga adicional próxima a la primera como se muestra en la Figura 8-12, de manera tal que no se altere su resistencia por efecto de la deformación, pero sí como consecuencia de cambios en la temperatura de la probeta.

En el puente, la conexión de esta nueva galga (R_T) debe hacerse en una rama adyacente a la de la galga que mide la deformación (Figura 8-12).

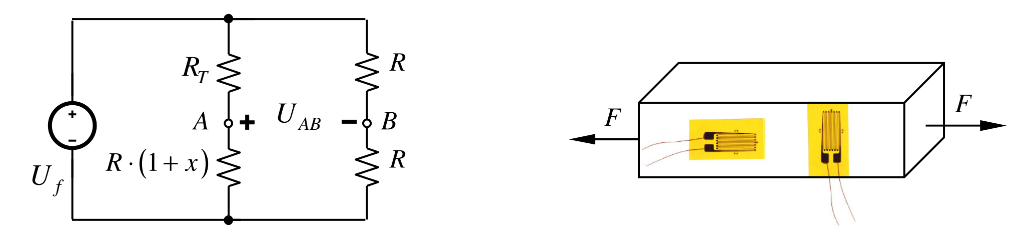


Figura 8-12 Compensación de la temperatura agregando una galga adicional

Para implementar el esquema de la Figura 8-12 se podrían utilizar dos galgas individuales montadas como se ve en dicha figura o con una galga combinada como la mostrada en la Figura 8-8b).

Observando la Ec. 8-5 se puede entender cómo afecta la variación de la temperatura al equilibrio del puente: si ambas galgas manifiestan la misma variación de resistencia como consecuencia de la misma variación de temperatura, el equilibrio del puente no se ve afectado, por encontrarse dichas resistencias a ambos lados del signo igual.

Compensación de la longitud de los cables de conexión

Es evidente que un factor adicional que afecta a las mediciones es la resistencia de los conductores de los cables de conexión. Si dicha resistencia es sustancialmente menor, se podría despreciar; pero dado que las secciones de los conductores debe ser de valores razonables (es decir, no demasiado grandes) y que además las longitudes de los cables pueden ser variables y considerables, es probable que en ciertos casos la resistencia en cuestión sea comparable con la de la galga.

En tal caso, se podría incluir en el circuito un tercer conductor de las mismas características que los existentes, según se muestra en la Figura 8-13.

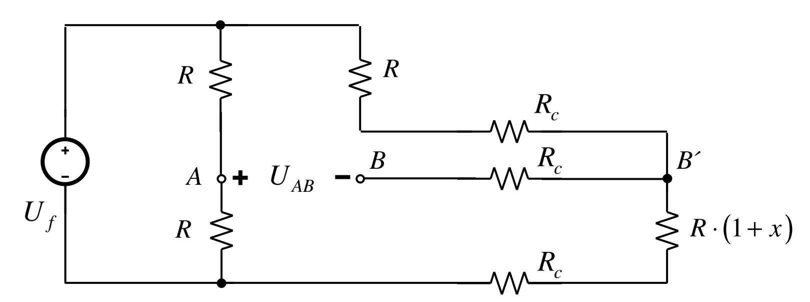


Figura 8-13 Compensación de la longitud de los conductores de conexión

Como se observa, uno de los conductores está dispuesto en serie con la galga, otro en serie con el resistor de la rama adyacente y el tercero en serie con el instrumento detector.

Al igual que en el caso de la compensación por temperatura, las resistencias iguales de los conductores en las ramas adyacentes no alteran el equilibrio del puente, efectuando la compensación; mientras el tercer conductor en serie con el detector no altera la lectura de éste.

8.3.3 Temperatura

Termocuplas

También llamados *termopares*, estos elementos basan su funcionamiento en el principio físico de que si se unen dos alambres de metales diferentes y el punto de unión se calienta o se enfría, aparece una diferencia de tensión entre los dos extremos libres no sometidos a las variaciones temperatura. Este principio fue descubierto en 1.821 por T. J. Seebeck, en cuyo honor se denomina *efecto Seebeck*.

La magnitud de las diferencias de tensión que resultan del efecto Seebeck es bastante pequeña, del orden de los mV. Sin embargo, dado que dichas diferencias de tensión son directamente proporcionales a las respectivas diferencias de temperatura que existen entre la unión caliente y los extremos fríos, es posible medir diferencias de temperatura con este elemento mediante detectores suficientemente sensibles.

La Tabla 8-2 muestra algunos termopares, sus rangos útiles de utilización, la variación de la tensión en dicho rango y sus iniciales normalizadas ANSI.

Tabla 8-2 Características de las termocuplas

Materiales de la unión	**Rango típico de temperatura [ºC]**	**Variación de la tensión en el rango [mV]**	**Designación ANSI**
Platino - rodio 6% / platino - rodio 30%	+38 a +1800	13,6	B
Tungsteno - renio 5% / tungsteno - renio 26%	0 a +2300	37,0	(C)
Cromel / constantan	0 a +982	75,0	E
Hierro / constantan	-184 a +760	50.0	J
Cromel / alumel	-184 a +1260	56,0	K
Platino / platino - rodio 13%	0 a +1593	18,7	R
Platino / platino rodio 10%	0 a +1538	16,0	S
Cobre / constantan	-184 a +400	26,0	T

Las termocuplas presentan un amplio rango de utilización: desde temepraturas criogénicas hasta mayores a las máximas que es posible encontrar en los escapes de los motores a reacción. Son económicas, resistentes y presentan buena estabilidad de largo plazo.

La selección del tipo de unión depende del tiempo de respuesta requerido, el rango de temperatura y las solicitaciones del ambiente donde el sensor se vaya a utilizar (atmósferas corrosivas, abrasión mecánica, humedad, etc.).

La Figura 8-14 muestra una gráfica comparativa de la señal de diferentes termocuplas en función de la temperatura.

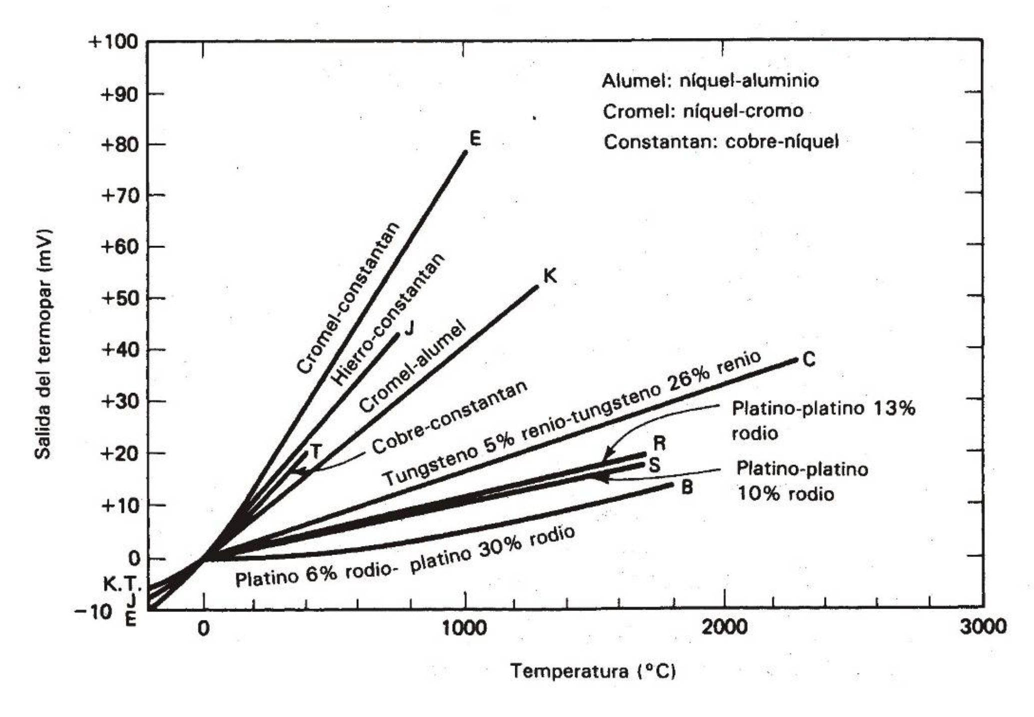


Figura 8-14 Características de salida de diversos termopares en función de la temperatura

La Figura 8-15 presenta un circuito típico elemental para efectuar una medición con un termopar, empleando un baño de hielo para mantener la unión de referencia a 0ºC. Esta unión de referencia es necesaria para los casos en que deban realizarse mediciones de temperatura "referidas", por ejemplo, al punto de congelación del agua.

En la actualidad, la tensión de la unión de referencia es proporcionada por circuitos electrónicos especiales.

Dado que la linealidad de las termocuplas no es muy buena, es común que las relaciones entre tensión de salida y temperatura de la unión se den en forma de tabla de valores.

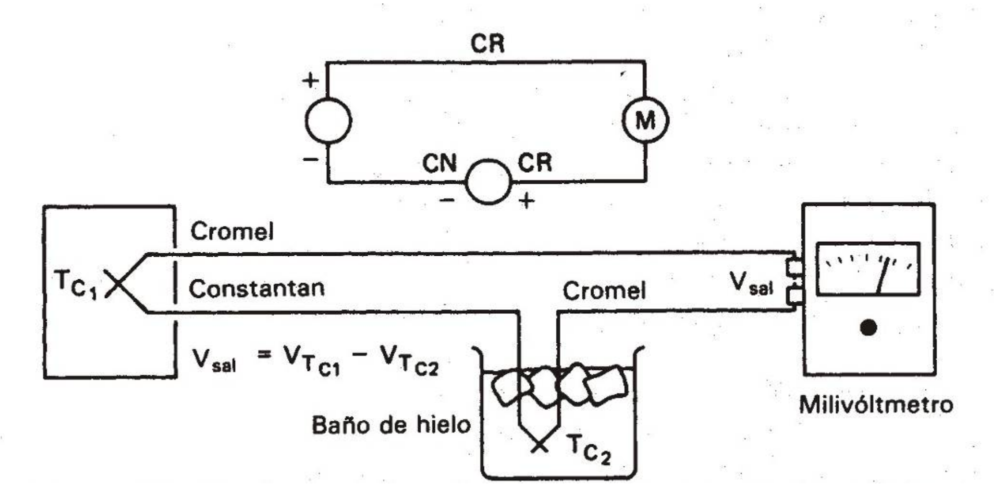


Figura 8-15 Circuito simple de medición de temperatura que emplea un baño de hielo en la unión de referencia

Las Fotos 8-1 y 8-2 muestran el detalle de un termopar tipo K (cromel-alumel) y otro termopar conectado a un instrumento digital para presentar lecturas de temperatura.





Foto 8-1 Termocupla tipo K



Foto 8-2 Termocupla conectada a un instrumento indicador

Termorresistores

También denominados RTD (*resistor dependiente de la temperatura*), aprovechan las características de variación de la resistividad de diferentes materiales en función de la temperatura.

Básicamente, consisten de una bobina de alambre delgado de cobre, níquel o platino que se encuentra fija a un soporte adecuado; muchas veces encapsulado bajo una cubierta de vidrio fundido.

También se emplean resistores de película metálica, que se fabrican depositando una película delgada sobre un sustrato de cerámica.

Las RTD de platino son las preferidas cuando se requiere exactitud y linealidad. En este caso suelen utilizarse las denominadas *Pt100*, cuya denominación identifica al platino (Pt) y el número 100 indica que el valor de la resistencia del elemento a $0\,°\mathrm{C}$ es $100\,\Omega$.

Para detectar los cambios de resistencia del elemento sensor a menudo se utilizan los puentes de Wheatstone, de manera similar al caso de las galgas extensiométricas; recordando las limitaciones respecto de la linealidad en la medición.

Otra forma posible es alimentar el termosensor mediante una fuente de corriente constante y efectuar la medición de la tensión en los bornes de la termorresistor mediante un voltímetro digital, conformando un sistema de medición de resistencia de *cuatro terminales*. Dado que la impedancia de entrada del voltímetro es muy elevada (por éste se deriva una corriente muy pequeña), y como se supone la corriente de la fuente constante e independiente de las variaciones de la resistencia del termoelemento; resulta que las tensiones medidas por el voltímetro son directamente proporcionales a las variaciones de resistencia del termosensor, éstas proporcionales a las variaciones de temperatura y las lecturas del voltímetro resultan también independientes de la longitud y resistencia de los conductores de conexión R_c. El circuito se muestra en la Figura 8-16.

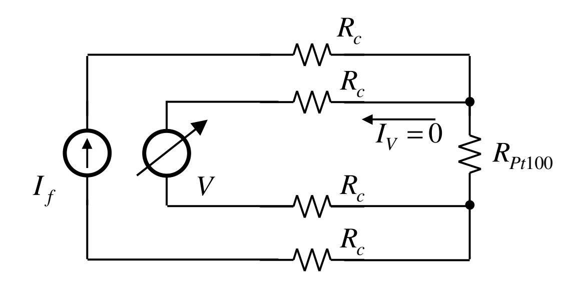


Figura 8-16 Circuito de medición de cuatro terminales

Una variante más sofisticada y que a la vez economiza uno de los cuatro conductores, consiste en utilizar el circuito de la Figura 8-17.

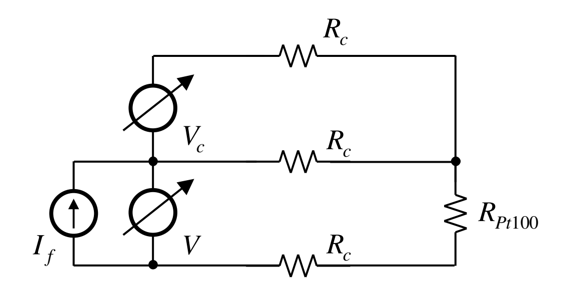


Figura 8-17 Circuito de medición de tres terminales

En este caso, el valor de la tensión medida, que es proporcional a la resistencia y por lo tanto, a la temperatura; resulta de realizar el cálculo siguiente:

$$U_{R_{Pt100}} = I_f \cdot R_{Pt100} = V - 2 \cdot V_c \qquad \text{Ec. 8-17}$$

Esto es posible en sistemas de medición automáticos, en los cuales se pueden efectuar operaciones matemáticas con las señales involucradas; presentándose en una pantalla el resultado de la medición de temperatura directamente.

En los casos en que se utilizan fuentes de corriente para alimentar RTDs, es neceario que la corriente entregada sea sumamente estable y resulta usual que los valores de la misma sea de menos de 5 mA, dado que valores mayores puede provocar variaciones en la resistencia del termosensor del orden de $1\,°\mathrm{C}$ con corrientes de tan sólo $5\,\mathrm{mA}$.

La Tabla 8-3 compara los rangos y los coeficientes de temperatura de la resistividad de los materiales más empleados en la fabricación de RTDs.

Las Fotos 8-3 a 8-5 muestran algunos sensores de temperatura tipo Pt100.

Tabla 8-3 Propiedades típicas de los RTD más usados

Material	Rango de temperatura [ºC]	Coeficiente de temperatura @ 25ºC [%/ºC]
Platino	-200 a +850	B
Níquel	-80 a +320	(C)
Cobre	-200 a +260	E
Níquel-hierro	-200 a +260	

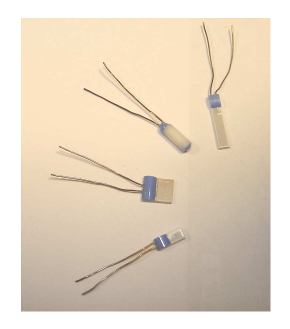


Foto 8-3 Diversos formatos de Pt100



Foto 8-4 Pt100 montada en un cable de tres conductores

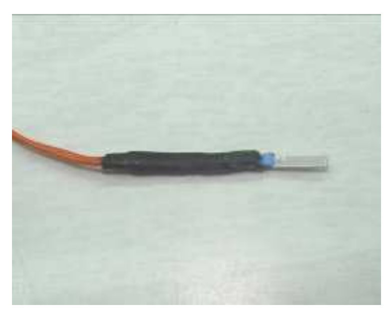


Foto 8-5 Detalle de montaje de la Pt100 en el cable

Termistores

Los termistores son dispositivos que también miden la temperatura mediante un cambio de resistencia.

Para la fabricación de termistores se utilizan cerámicas semiconductoras, que consisten en una mezcla de óxidos metálicos de manganeso, níquel, cobalto, cobre y hierro.

A diferencia de los metales utilizados en la fabricación de los dispositivos RTD, la resistencia de los materiales que conforman los termistores puede aumentar o decrecer con la variación de la temperatura, según el tipo de material utilizado; a los primeros se denomina PTC (*positive temperature coefficient* - *coeficiente de temperatura positivo*), mientras que a los segundos se los conoce como NTC (*negative temperature coefficient* - *coeficiente de temperatura negativo*). Los rangos de medición pueden variar entre aproximadamente $-100\,°\mathrm{C}$ a $+300\,°\mathrm{C}$.

La variación de la resistencia versus la temperatura en estos elementos no es lineal, pero en algunos materiales el cambio de la resistencia puede ser de hasta $6\,\%$ por cada $1\,°\mathrm{C}$ (aunque materiales con cambios del orden del $1\,\%$ son más usuales).

Generalmente, estos elementos se utilizan en sistemas digitales en los cuales es posible, mediante software adecuado, linealizar la característica resistencia-temperatura.

Dado que las variaciones de resistencia por grado de temperatura de los termistores es tan importante, estos elementos son preferidos cuando es necesario presentar buena exactitud y resolución para medir en el rango indicado más arriba.

Empleando un amperímetro para medir corriente a través de un termistor, se pueden detectar cambios de temperatura del orden de $\pm 0{,}1\,\mathrm{K}$. Si en su lugar se utilizara un puente de Wheatstone para medir las variaciones de resistencia, el sistema de medición sería capaz de detectar cambios tan pequeños como $\pm 0{,}005\,\mathrm{K}$.

La Figura 8-18 muestra la característica de resistencia versus temperatura de un termistor tipo NTC.

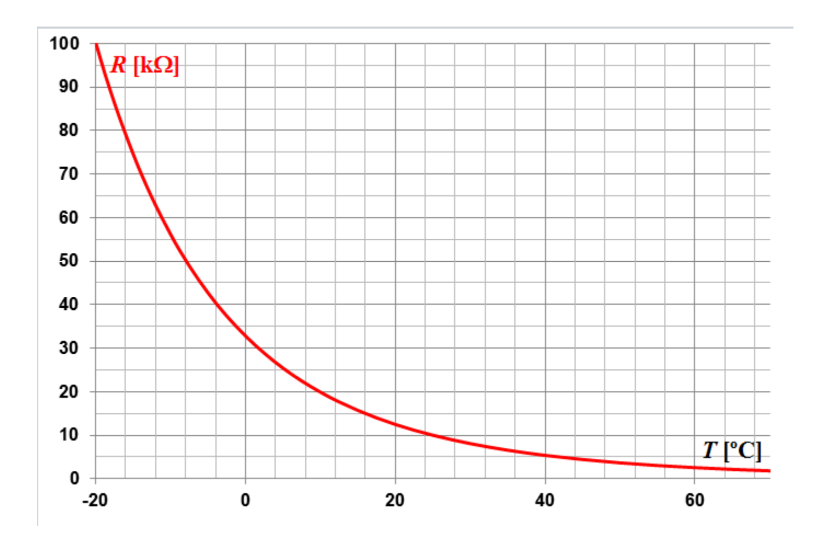


Figura 8-18 Curva típica de un termistor NTC típico

Una aproximación utilizada frecuentemente de la característica del termistor en forma generalizada es la siguiente:

$$R_t = A \cdot e^{\beta\left(\frac{1}{T_t}\right)} \qquad \text{Ec. 8-18}$$

Particularmente, si se tienen los datos de referencia de un dado termistor, la anterior se convierte en:

$$R = R_0 \cdot e^{\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)} \qquad \text{Ec. 8-19}$$

en donde R: resistencia @ T en $[\mathrm{K}]$

R_0: resistencia @ T_0 en $[\mathrm{K}]$

β: constante del ajuste de curva (entre 2000 y 4000 medido en $[\mathrm{K}]$

Se invita al lector a obtener la expresión de la Ec. 8-19 a partir de la Ec. 8-18.

8.3.4 Presión

La medición de presiones es una actividad que tiene numerosas aplicaciones en la industria. Incluso las mediciones de otros parámetros muy diferentes (por ejemplo, caudales), se basan en la medición de presiones para determinar su valor. De aquí la importancia de presentar los transductores de este tipo más difundidos y su aplicación.

Piezoeléctricos

Un campo eléctrico aplicado en superficies opuestas de ciertos cristales provoca que éstos reaccionen deformándose mecánicamente. El fenómeno es reversible: las superficies de estos cristales se cargan eléctricamente bajo la acción de esfuerzos mecánicos. En esto consiste el denominado *efecto piezoeléctrico directo*.

El principio de funcionamiento del que se saca provecho en los materiales piezoeléctricos se basa en lo mencionado; y de los numerosos materiales piezoeléctricos existentes, el cuarzo es el más utilizado debido a su estabilidad.

Según el plano de corte del cristal (tallado), se obtienen elementos que son sólo sensibles a las presiones o bien a las fuerzas de cizalladura en una dada dirección.

El montaje de un cristal piezoeléctrico formando un dispositivo apto para medir presiones resulta en un capacitor de placas planas y paralelas, en el cual el dieléctrico es el mismo elemento piezoeléctrico, tallado y montado adecuadamente, cuya capacitancia vale:

$$C_d = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} \qquad \text{Ec. 8-20}$$

donde ε: constante dieléctrica del material del cristal

A: área de las placas

d: separación de las placas

A veces, y dependiendo del tipo de estudio que pretenda realizarse en un dispositivo eléctrico que incluya un cristal piezoeléctrico, debe tenerse en cuenta el modelo equivalente del cristal que incluya las características mecánicas del mismo, según se ve en la Figura 8-19.

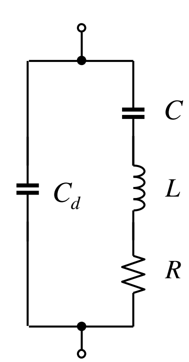


Figura 8-19 Modelo equivalente de un cristal piezoeléctrico

donde C_d: capacitancia del dieléctrico

C: capacitancia que representa el equivalente eléctrico de la elasticidad del material

L: inductancia que representa el equivalente eléctrico de la masa del material

R: resistencia que representa las pérdidas mecánicas (amortiguamiento) del material

En nuestro caso, podemos utilizar un modelo simple considerando solamente la capacitancia del dieléctrico. Si además tenemos en cuenta que al aplicar una fuerza aparecen cargas

según el eje que corresponda, un modelo simple que incluye el efecto de la aplicación de una fuerza tiene la forma de la Figura 8-20.

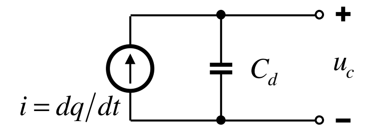


Figura 8-20 Modelo simple de un cristal piezoeléctrico que incluye el efecto de una fuerza aplicada

La fuente de corriente se expresa en función de la variación de la carga respecto del tiempo, debido a que dicha corriente no tiene forma definida matemáticamente en la mayoría de los casos.

La Figura 8-21 muestra un esquema de un sensor de presión típico con cristal piezoeléctrico.

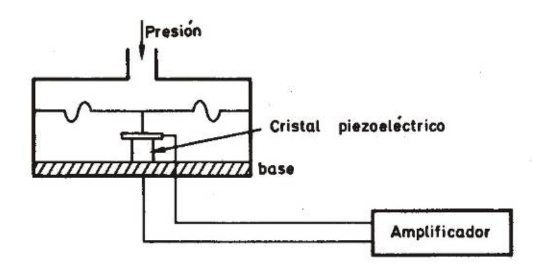


Figura 8-21 Sensor de presión con cristal piezoeléctrico

Es importante mencionar que los transductores piezoeléctricos precisan de un *amplificador de carga* que transforme las cargas electrostáticas generadas por el cristal en tensiones proporcionales a dichas cargas.

En este sentido, cabe recordar que el amplificador operacional utilizado para esta aplicación debe presentar una elevada impedancia de entrada a fin de minimizar las fugas de carga hacia el mismo, de forma que todas las cargas generadas migren hacia el capacitor de realimentación. La Figura 8-22 muestra un circuito de este tipo.

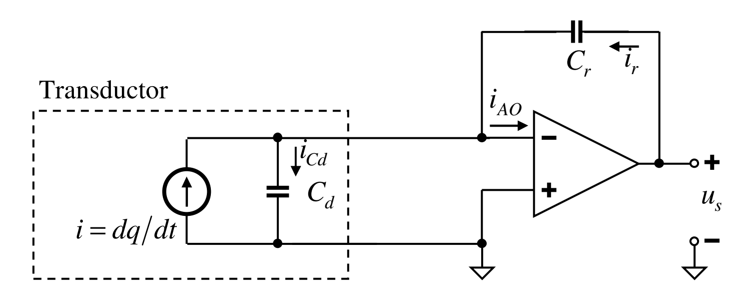


Figura 8-22 Amplificador de carga asociado a un sensor de presión con cristal piezoeléctrico

Deben recordarse los detalles de funcionamiento de este circuito, con lo cual resulta que su tensión de salida vale:

$$u_S = \frac{-K_P \cdot x_i}{C_r} \qquad \text{con} \qquad q = K_P \cdot x_i \qquad \text{Ec. 8-21}$$

donde x_i : deformación provocada por la fuerza aplicada

K_p : constante que relaciona la carga generada q en el cristal y la deformación provocada x_i

C_r : capacitancia de realimentación

Resistivos

Básicamente están conformados por una galga extensométrica montada sobre un diafragma, y que forma parte de un puente de Wheatstone. Cualquier variación de presión que mueva el diafragma del transductor cambia la resistencia de la galga y desequilibra el puente.

Una innovación de la galga la constituyen los transductores de presión de silicio difundido. Consisten en un elemento de silicio situado dentro de una cámara conteniendo silicona que está en contacto con el proceso a través de un diafragma flexible. El sensor está fabricado a partir de un monocristal de silicio en cuyo seno se difunde boro, u otro contaminante adecuado, para formar un puente de Wheatstone, constituyendo así una galga autocontenida. El espesor del sensor determina el rango de medida del instrumento.

La construcción de este tipo de elementos responde prácticamente al esquema de la Figura 8-23.

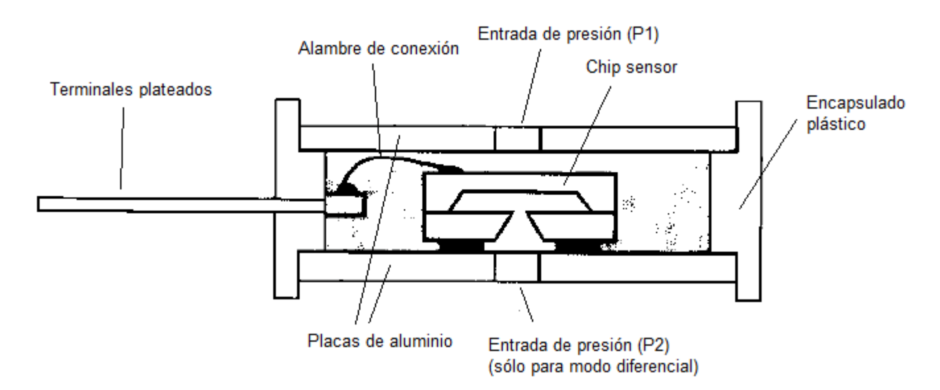


Figura 8-23 Esquema constructivo de un sensor de presión resistivo tipo puente de Wheatstone

El circuito de aplicación es el bien conocido puente de Wheatstone asociado a un amplificador operacional en configuración diferencial, que se reproduce en la Figura 8-24.

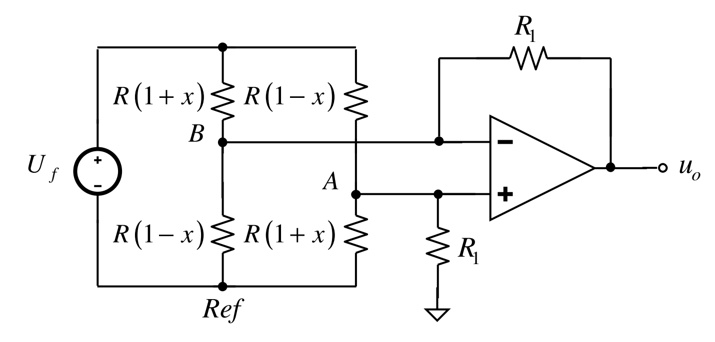


Figura 8-24 Puente de Wheatstone asociado a un amplificador diferencial

Un esquema más elemental de este tipo de transductor, y en el cual se puede asociar su funcionamiento con el del puente, se muestra en la Figura 8-25.

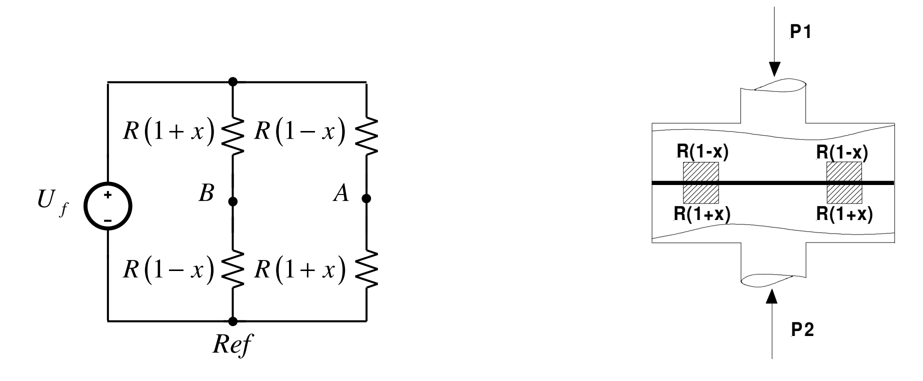


Figura 8-25 Esquema didáctico de un sensor tipo puente siendo $P_1 > P_2$

Este último esquema resulta gráfico a los fines conceptuales, pues cada resistor "real" del sensor se puede asociar a un resistor del puente de Wheatstone. Se puede observar que si el diafragma se deforma por efecto de $P_1 > P_2$; R_2 y R_4 disminuyen, mientras R_1 y R_3 aumentan. Si dicha variación es la misma y de muy pequeño valor en todos los resistores, entonces se justifica la representación del circuito como indica la figura anterior.

Como se ha visto del estudio del puente de Wheatstone asociado a un amplificador operacional en configuración diferencial, se puede observar que esta disposición presenta la máxima sensibilidad; y si además, las resistencias nominales del puente en reposo son iguales, la tensión de salida del amplificador operacional resulta:

$$u_0 = 2\frac{R_1}{R}U_f \cdot x \qquad \text{Ec. 8-22}$$

donde R : resistencia nominal en reposo de cada rama del puente.

R_1 : resistencia de realimentación del amplificador diferencial.

A las ventajas mencionadas se puede agregar que, debido a la propia construcción del dispositivo, estos elementos presentan compensación de temperatura y linealidad.

Existe una enorme variedad de formas y modelos de sensores de presión, según la aplicación y presiones a medir Las Fotos 8-6 y 8-7 muestran algunos de ellos.





Escala: ⬄ 1 cm

Foto 8-6 Algunos sensores de presión con la escala para comparar tamaños

Foto 8-7 Otros modelos de sensores de presión

8.3.5 Caudal

En muchas aplicaciones industriales es deseable medir la tasa de flujo (caudal) de un fluido, sea líquido o gas. Este es un tema complejo, por lo que sólo se resumirán algunos conceptos, presentándose algunas de las técnicas más comunes de medición.

Placa orificio

Consiste en una placa perforada (orificio calibrado) instalada en la tubería por la cual circula el fluido a medir, con dos tomas que se utilizan para medir la presión a ambos lados de la placa, y cuya diferencia suele denominarse *presión diferencial*. De este modo, medir la presión diferencial equivale a medir el caudal.

La Figura 8-26 muestra las presiones en la tubería en las proximidades de la placa.

Los fundamentos y las ecuaciones que dominan el comportamiento de este tipo de sistemas provienen del teorema de Bernouilli, lo cual no es objeto del presente análisis. En base a lo anterior, se puede determinar una fórmula teórica aproximada la cual, considerando factores de corrección que tienen en cuenta el reparto desigual de velocidades en la sección del caño, la contracción de la vena de fluido, rugosidades de la tubería, el estado el fluido, etc; da como resultado:

$$Q = k\sqrt{\frac{h}{\gamma}} \qquad \text{Ec. 8-23}$$

en la cual Q : caudal en las condiciones de medida
k : coeficiente de proporcionalidad
h : presión diferencial
γ : peso específico del fluido en las condiciones de medida

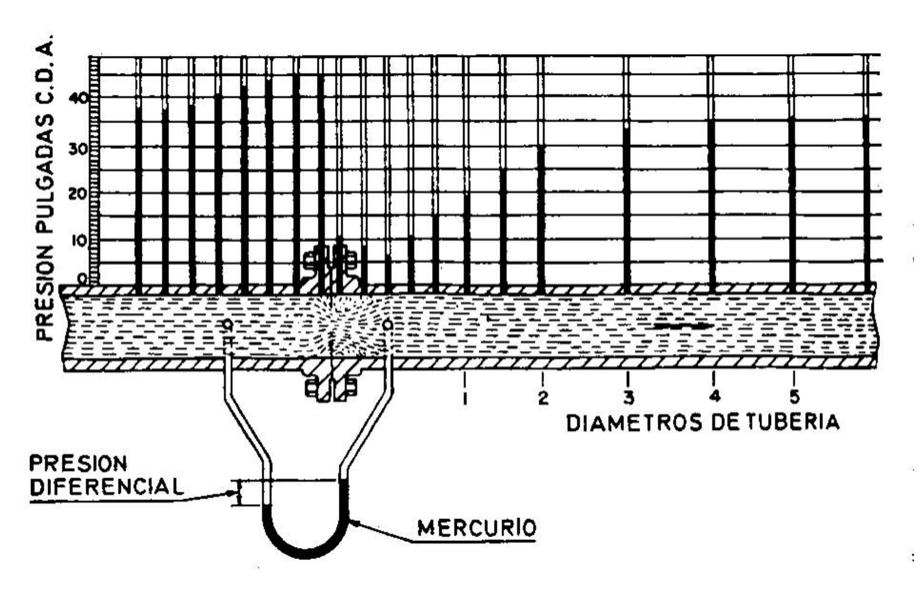


Figura 8-26 Presión diferencial creada por la placa orificio

La precisión obtenida con este tipo de sistemas es del orden de $\pm 1\,\%$ a $\pm 2\,\%$.

Generalmente, el tubo con mercurio de la Figura 8-26 es reemplazado por otros sistemas de medición de presión diferencial, siendo actualmente muy utilizados transductores de los tipos vistos en la sección 8.3.4.

Tubo Venturi

El principio de medición es similar al de la placa orificio. El caudal se mide a partir de la diferencia de presión entre diferentes secciones del dispositivo. La Figura 8-27 muestra un esquema típico.

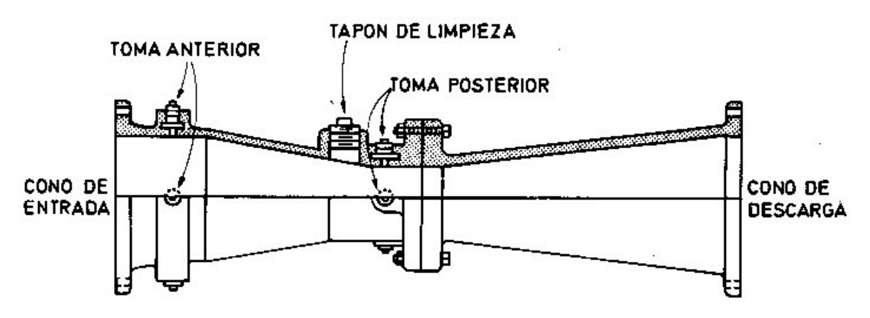


Figura 8-27 Tubo Venturi

Permite medir caudales superiores a los de la placa orificio con menores pérdidas de carga. A su gran precisión, del orden de ±0,75%, se suma la ventaja de permitir el paso de fluidos con un porcentaje relativamente grande de sólidos; aunque si estos son abrasivos, pueden influir en la geometría del elemento, afectando la exactitud de la medida.

Como desventaja puede mencionarse su elevado costo, comparado con la placa orificio.

Al igual que en el caso de la placa orificio, se pueden instalar sistemas de medición de presión diferencial entre las tomas anterior y posterior, como los transductores vistos en la sección 8.3.4.

Turbinas

Consisten en un rotor que gira al paso de un fluido, con velocidad directamente proporcional al caudal. Dicha velocidad de giro del rotor es convertida por un detector adecuado en una señal pulsante. Existen dos variantes de convertidor: *de reluctancia* e *inductivo*.

En el convertidor de reluctancia, las paletas del rotor están construidas con un material ferromagnético. El paso de cada paleta a través del campo magnético creado por un imán permanente montado como núcleo de una bobina captora exterior, determina el cambio de la reluctancia del circuito, generando una señal en los bornes de la mencionada bobina.

En el de tipo inductivo, el rotor lleva incorporado un imán permanente en una paleta (o uno en cada una de las paletas) y cada paso del imán genera una tensión inducida en bornes de la bobina captora exterior. A veces, en lugar de una bobina, suele utilizarse un sensor de efecto Hall, a la salida del cual se obtiene una señal de tensión.

La Figura 8-28 muestra una turbina axial, en esquema y en corte para permitir observar el rotor, los deflectores y la bobina captora.

Así, a partir de la señal de salida puede obtenerse un tren de pulsos, con la misma frecuencia que la de la señal original. Cualquiera sea el caso, midiendo la frecuencia de la señal

de salida o bien contando los pulsos obtenidos, es posible determinar la velocidad de giro del rotor; y por lo tanto, el caudal del fluido.

La Figura 8-29 muestra un diagrama de bloques de un sistema de medición típico.

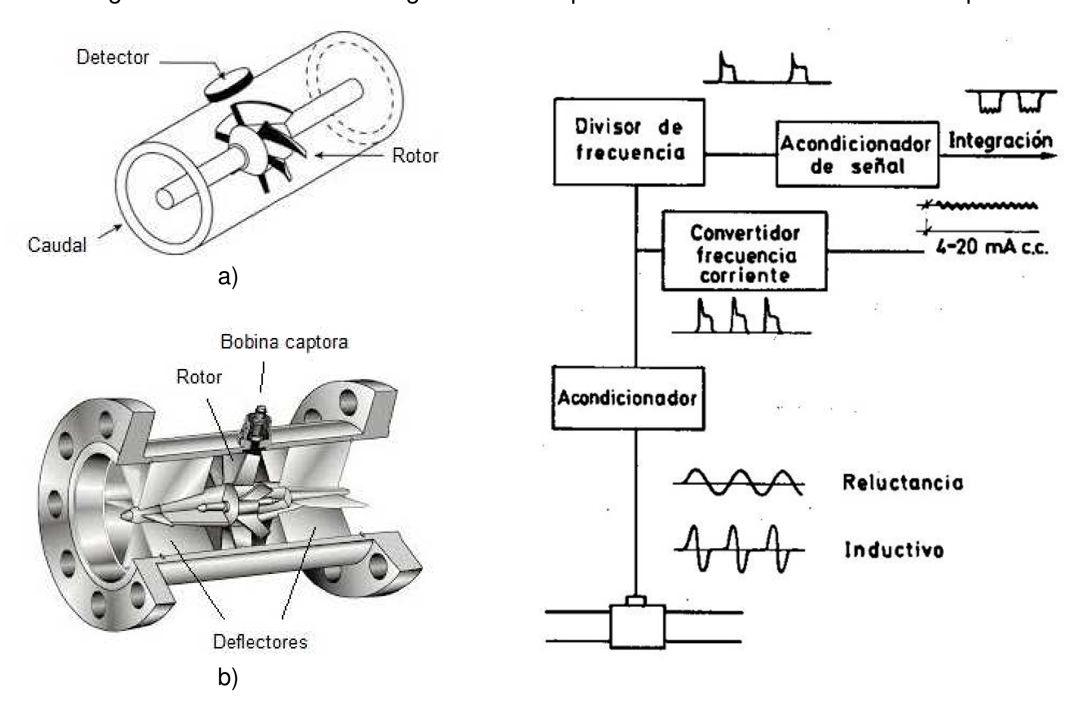


Figura 8-28 Medidor de caudal del tipo turbina axial. a) Esquema, b) corte.

Figura 8-29 Diagrama de bloques para medición de caudal mediante turbina

La información obtenida del transductor suele ser presentada in situ mediante un totalizador indicador (Figura 8-30), o bien mediante el uso de convertidores tensión-corriente y lazos de 4-20 mA como entrada de indicadores remotos o de PLCs (controladores lógicos programables).



Figura 8-30 Dos modelos de indicador totalizador de caudal

La utilización de estos dispositivos se limita a fluidos limpios, es decir, no admiten la presencia de sólidos en suspensión.

La precisión es del orden de $\pm 0{,}3\,\%$ si el flujo es laminar; para cumplir esta condición, el equipo debe instalarse sobre una tubería recta de longitudes mínimas igual a 15 diámetros aguas arriba y 6 diámetros aguas abajo.

Debido a la elevada precisión de medida, estos dispositivos son muy utilizados en la industria petroquímica.

Medidores ovales

Forman parte de la familia de los denominados medidores de *desplazamiento positivo*.

Están básicamente constituidos por dos ruedas dentadas de forma ovalada que engranan entre sí y tienen un movimiento de giro debido a la presión diferencial creada por el líquido. La Figura 8-31 muestra una secuencia de funcionamiento de un dispositivo como el descripto.

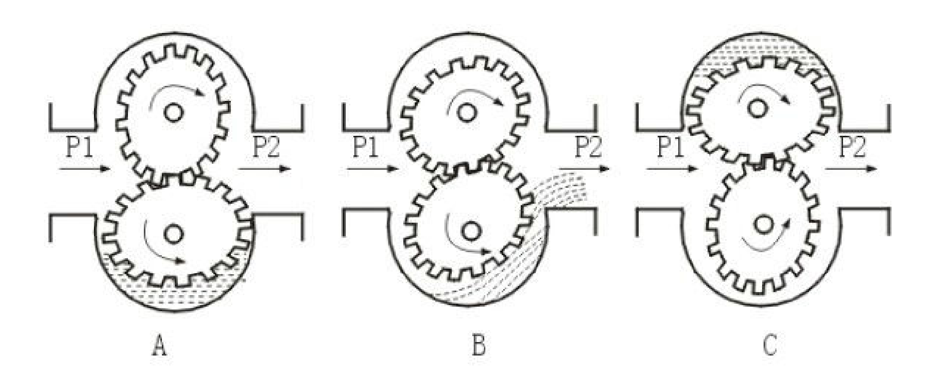


Figura 8-31 Secuencia de funcionamiento de un caudalímetro de desplazamiento positivo

La acción del líquido se ejerce alternativamente sobre cada una de las ruedas dando lugar a un giro suave de un par casi constante. Debido a las características de su construcción, la medición obtenida es prácticamente independiente de las variaciones en la densidad y en la viscosidad del líquido.

Pueden tener acoplados diversos tipos de transductores para detectar el movimiento de las ruedas. Entre los más comunes se encuentran los de impulsos por microinterruptor y los de impulsos por *sensor magnético*.

En el primer caso, el eje del medidor acciona un interruptor mediante una leva. El interruptor está conectado a un contador electromecánico de baja velocidad.

En el segundo, se utiliza un rotor que tiene insertados unos pequeños imanes en combinación con una bobina captora, formando un conjunto similar al descripto en los medidores a turbina.

La precisión es del orden de $\pm 0{,}5\,\%$, siendo muy utilizados en la industria del petróleo para la medición de flujo de aceites u otros subproductos viscosos.

8.3.6 Caudal másico

Este tipo de medición es muy utilizada en gases licuados y otros fluidos que presentan importantes variaciones de densidad en función de la temperatura y presión a la que están sometidos.

La determinación del caudal másico puede efectuarse a partir de una medida volumétrica, compensándola para las variaciones de la densidad del fluido; o bien obtener la medición directamente aprovechando características medibles de la masa del fluido en cuestión. En este último caso se realiza directamente la medición el caudal másico, por lo que no se ven afectados por cambios en la temperatura, viscosidad, presión o densidad del fluido que circula por la cañería.

Medición de caudal másico por compensación

Esta opción proviene de la metodología utilizada históricamente en la industria petroquímica, cuando se efectuaban en forma independiente las mediciones de caudal volumétrico, temperatura y presión. Estas magnitudes eran registradas gráficamente en cartillas circulares de papel, para un mismo fluido. Los registros, que eran obtenidos periódicamente cada 24 horas, se procesaban manualmente a partir de dichos gráficos, y con los datos obtenidos se compensaban termodinámicamente los valores másicos a las condiciones de referencia preestablecidas (por ejemplo, $0\,°\mathrm{C}$ y $1013\,\mathrm{hP}$) para las variaciones de temperatura y presión; resultando un proceso largo y tedioso.

Actualmente, y merced a los sistemas electrónicos e informáticos, es posible automatizar el proceso, presentado los resultados en tiempo real y disponibles para cualquier procesamiento posterior.

Un diagrama esquemático de un sistema como el descripto se muestra en la Figura 8-32.

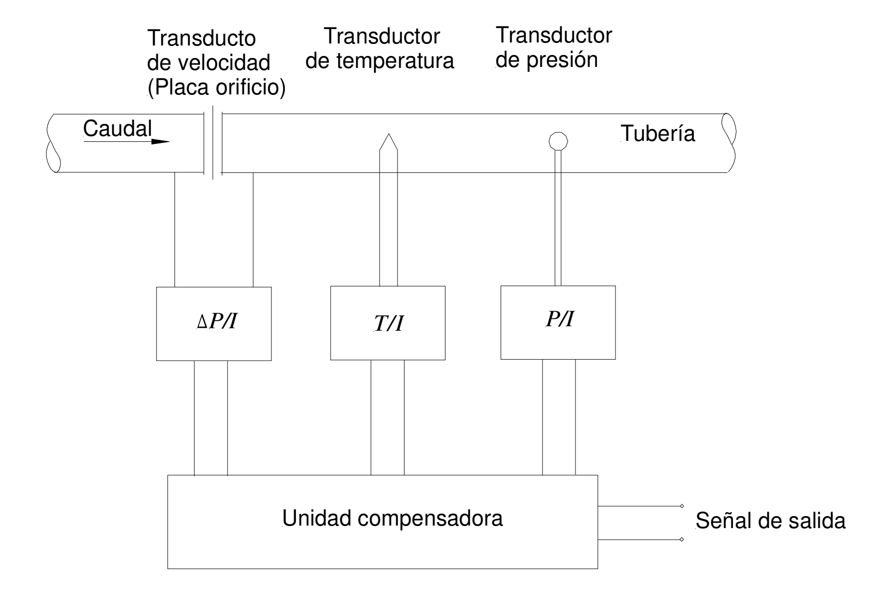


Figura 8-32 Diagrama esquemático de un sistema medidor de caudal másico por compensación

En dicha figura, en lugar de una placa orificio, se podría haber utilizado otro tipo de medidor de caudal (tubo venturi o turbina).

En el presente esquema, y dado que se supone que en el ambiente industrial en el cual está instalado el equipamiento hay considerable ruido electromagnético, las señales de cada transductor se convierten en corrientes proporcionales a las respectivas señales. Estas corrientes se envían a la unidad compensadora, que en forma adecuada da origen a una señal proporcional a la masa de fluido circulante por la cañería.

Caudalímetro térmico

Los medidores térmicos de caudal se basan comúnmente en la elevación de la temperatura del fluido al pasar a través de un cuerpo caliente o bien en la pérdida de calor experimentada por un cuerpo caliente inmerso en el fluido. Sea cual sea la técnica que utilicen los caudalímetros térmicos, su funcionamiento se basa en la insensibilidad de los fluidos a la variación de su calor específico en función de la presión y de la temperatura, es decir, el calor específico de los fluidos se puede considerar prácticamente independiente de la presión y de la temperatura.

En base a lo anterior, la relación que debe aplicarse a este proceso corresponde al primer principio de la termodinámica:

$$Q = m \cdot C_e \Delta t \qquad \text{Ec. 8-24}$$

en donde Q : calor transferido
m : masa del fluido
C_e : calor específico del fluido
Δt : variación de la temperatura del fluido

Si se conoce el fluido, se sabe su calor específico. El salto térmico se puede medir mediante sensores y el calor cedido es el aportado externamente para poder realizar la medición. Solo queda el caudal másico como incógnita y por tanto, se puede calcular.

Los medidores del primer tipo mencionado, también llamados *medidor de Thomas*, están constituidos por una fuente de calor de precisión, es decir muy estable, que proporciona calor constante a una sección de la cañería donde se desea medir. La Figura 8-33 muestra un medidor de este tipo.

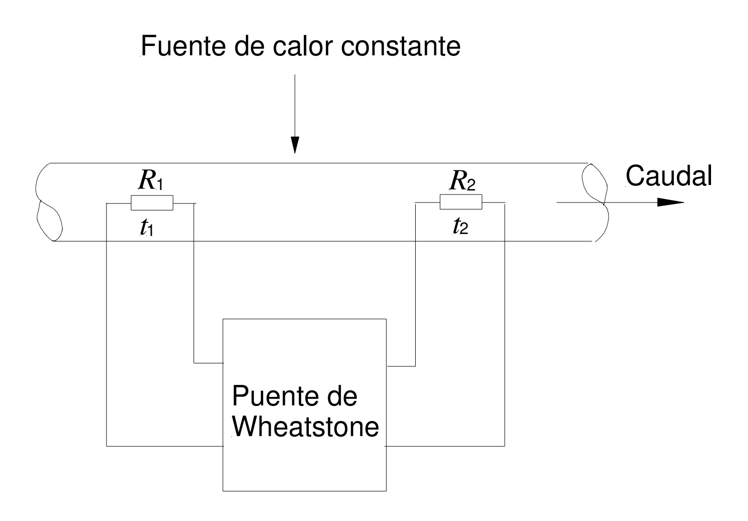


Figura 8-33 Esquema de un medidor térmico del tipo de Thomas

En dos puntos equidistantes de la fuente de calor se sitúan transductores resistivos de temperatura. Cuando el fluido está en reposo, la temperatura es idéntica en ambos sensores. Cuando el fluido circula, transporta una cierta cantidad de calor hacia el segundo elemento R_2, originándose una diferencia de temperatura entre ambos que va aumentando progresivamente a medida que aumenta el caudal. Esta diferencia es proporcional a la masa que circula en la tubería de acuerdo con la relación termodinámica ya vista, de la siguiente manera:

$$Q = m \cdot C_e (t_2 - t_1) \qquad \text{Ec. 8-25}$$

en donde t_1: temperatura del sensor R_1

t_2: temperatura del sensor R_2

El sistema está conectado a un puente de Wheatstone que mide la diferencia de temperaturas y mediante la relación anterior se puede determinar el caudal.

En el segundo caso, un sistema muy usado lo constituye el *anemómetro de hilo caliente* (Figura 8-34).

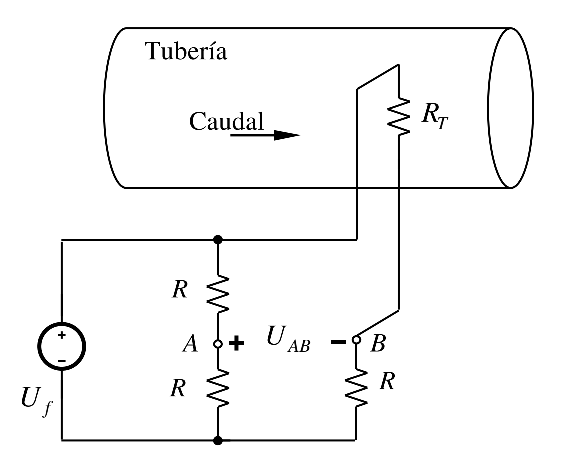


Figura 8-34 Esquema de un medidor térmico del tipo de hilo caliente

Consiste de un hilo caliente que se enfría por efecto de la circulación del fluido. La resistencia eléctrica del hilo cambia con la temperatura, la cual dependerá del caudal del fluido: a mayor caudal, más se enfriará el hilo y mayor será el cambio en la resistencia. Estos cambios de resistencia son detectados por un puente de Wheatstone, cuyo desequilibrio resulta proporcional al caudal, independientemente de la temperatura y presión el fluido.

Caudalímetro de efecto Coriolis o giroscópico

Efecto Coriolis

La Figura 8-35 muestra gráficamente cómo se origina la *fuerza de Coriolis*: un cuerpo que se desplaza radialmente sobre una plataforma giratoria experimenta una fuerza que resulta tangente a la dirección del movimiento de la plataforma en el punto donde se encuentra el cuerpo; si se conocen la velocidad angular de la plataforma, la fuerza actuante y la velocidad del cuerpo, es posible determinar la masa del mismo.

A partir de la Figura 8-35, la expresión general de la fuerza de Coriolis viene dada por:

$$\vec{F}_c = 2 \cdot m \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega}) \qquad \text{Ec. 8-26}$$

en donde F_c : fuerza de Coriolis

m : masa del objeto sobre el cual se ejerce la fuerza de Coriolis

v : velocidad del objeto

ω : velocidad angular de la plataforma donde se encuentra el objeto

además, como se indica, la fuerza, velocidad de la masa y velocidad angular se representan como vectores, y la cruz denota "producto vectorial".

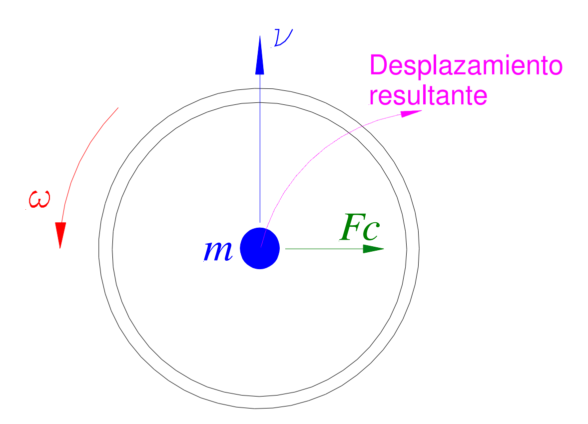


Figura 8-35 Origen de la fuerza de Coriolis y las magnitudes relacionadas

Medidor de caudal másico por efecto Coriolis

Basado en lo anterior, un caudalímetro de efecto Coriolis consiste de un tubo (a veces dos), uno de cuyos ejes se ve sometido a una vibración oscilante (mediante un generador armónico adecuado) de frecuencia angular ω constante. Dicha vibración, que generalmente es la frecuencia de resonancia del tubo, se consigue mediante un actuador electromecánico (gebnerador armónico). En estas condiciones, el movimiento en cualquier punto del tubo sigue una onda sinusoidal y, cuando existe flujo a través del tubo, éste se deforma proporcionalmente al caudal másico, siendo tal deformación captada por un sensor de posición adecuado .

Las fuerzas que se originan debido al movimiento de fluido en la tubería del instrumento dan lugar al denominado efecto Coriolis que, según la forma constructiva de la misma, se deformará siguiendo patrones que serán captados por el detector de posición.

Las Figuras 8-36 a 8-39 muestran algunas de las diversas formas constructivas que puede adoptar un caudalímetro de efecto Coriolis.

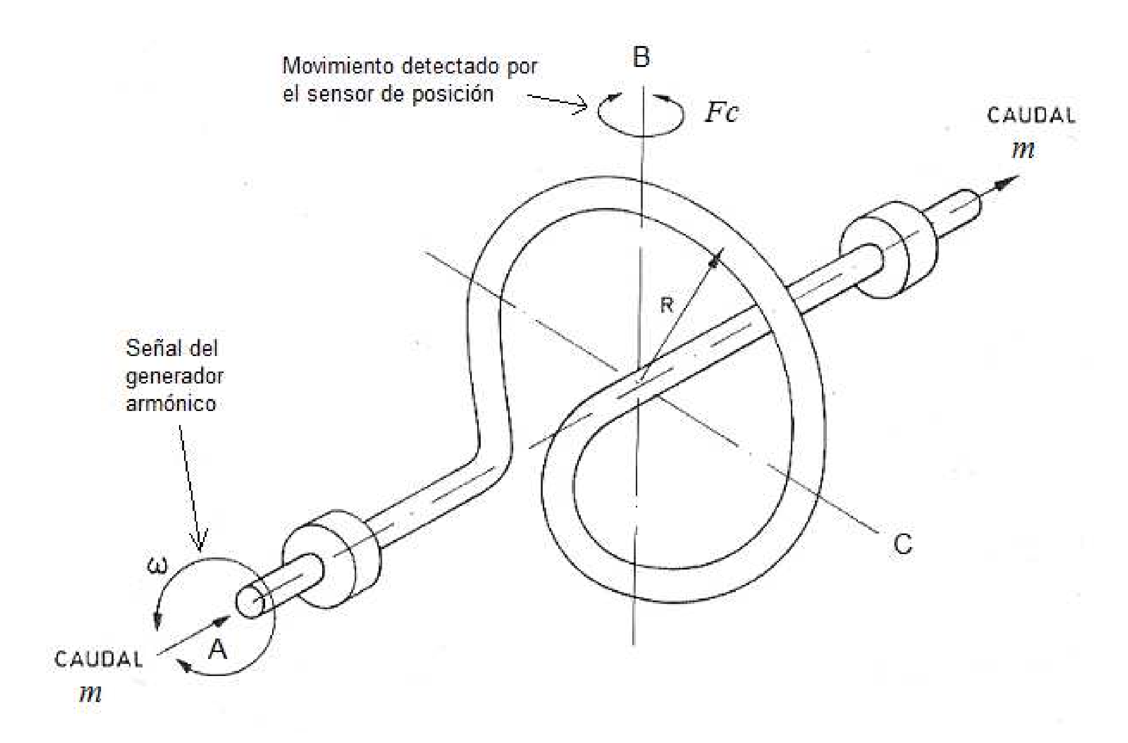


Figura 8-36 El eje A se ve sometido a una oscilación de pulsación constante, mientras que el movimiento del fluido por la tubería da lugar a un momento de precesión alrededor del eje B que es captado por un detector.

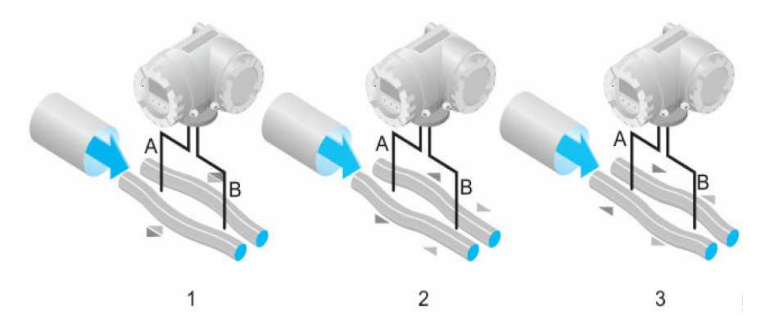


Figura 8-37 Dos tubos paralelos que contienen fluido oscilan en fases contrarias; con lo que, en función de la masa circulante, las fuerzas de coriolis presentes en los tubos generan una alteración en la fase con la cuales estos oscilan. En los puntos A y B se localizan los detectores de posición.

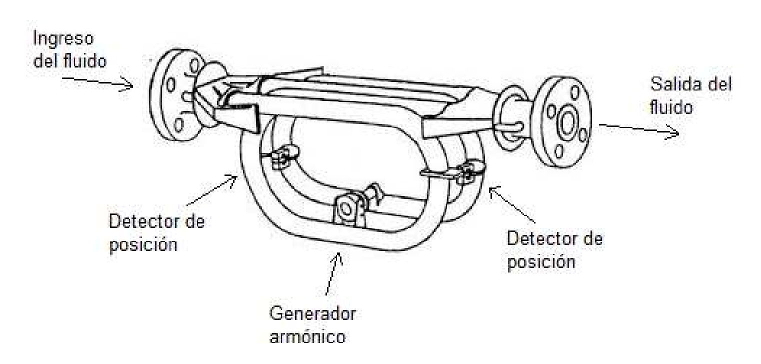


Figura 8-38 Variante constructiva similar a la de la Figura 8-37

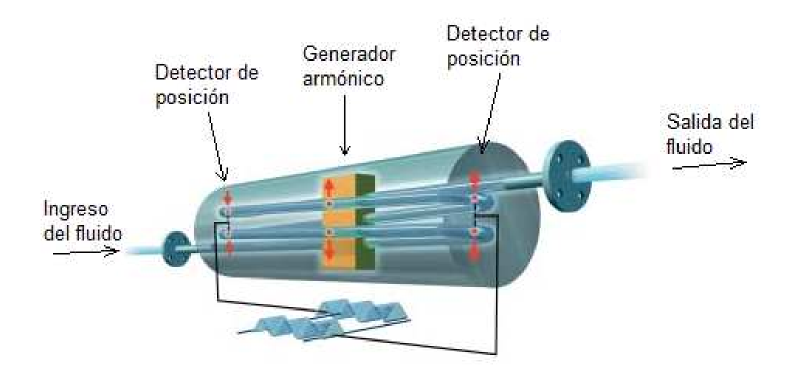


Figura 8-39 Variante constructiva similar a la de las Figuras 8-37 y 8-38, pero con un solo tubo

El principio de medición opera independientemente de la temperatura, presión, viscosidad, conductividad o perfil del flujo; lo cual permite que este método sea bastante robusto. La precisión en la medición resulta muy elevada (generalmente de ±0,1%). Además, no requiere el ajuste de tramos de cañería de entrada/salida como en el caso de las turbinas.

8.4 Referencias bibliográficas

"Transducer interfacing handbook. A guide to analog signal conditioning". Editado por D. H. Sheingold. Publicado por Analog Devices Inc.

"Transductores y medidores electrónicos". Autores varios. Editorial Marcombo.

"Guía para mediciones electrónicas y prácticas de laboratorio". Stanley Wolf, Richard Smith. Editorial Prentice Hall.

CAPÍTULO 9
Circuitos magnéticos

En las máquinas eléctricas tales como transformadores, motores y generadores, así como en otros dispositivos electromagnéticos, se utilizan materiales ferromagnéticos para canalizar el flujo magnético a lo largo de una determinada parte del espacio.

Todos estos aparatos consisten fundamentalmente de *núcleos* de material ferromagnético y *bobinados* formados por conductores aislados enrollados sobre dichos núcleos. Estos últimos suelen tener las formas más diversas de acuerdo a los requerimientos que deban satisfacer los diferentes dispositivos.

Por lo tanto, un circuito magnético es un conjunto de elementos destinados a crear un campo magnético en un cierto lugar del espacio.

Así como en los circuitos eléctricos las fuentes de tensión y corriente son los elementos que aportan la energía, en los circuitos magnéticos esta función la cumplen casi siempre bobinas arrolladas sobre núcleos ferromagnéticos las cuales, al establecerse una corriente en ellas, dan lugar a un flujo en dichos núcleos. Y al decir "casi siempre" debe entenderse que puede existir una alternativa dada por *imanes permanentes*, cuyo análisis queda fuera del alcance de este texto.

9.1 Conceptos básicos

Un imán es capaz de atraer y retener trozos de hierro. Este fenómeno se conocía ya antes de nuestra era; el imán natural más antiguo es la piedra de magnetita (Fe_3O_4) encontrada en la ciudad de Magnesia (Asia Menor).

Cualquier imán tiene un polo norte y un polo sur. Estos nombres proceden del fenómeno prematuramente advertido de que un imán móvil se orienta aproximadamente en la dirección geográfica norte-sur. Por otra parte, la experiencia demuestra que los polos del mismo nombre se repelen y los de distinto nombre se atraen.

Cada imán transmite al espacio que lo rodea un estado especial que se denomina *campo magnético*. Este campo no se puede percibir directamente con los sentidos del hombre (compárese, por ejemplo, con el campo de gravitación de la tierra). Con la ayuda de pequeños trozos de hierro (limaduras de hierro) se puede representar de manera visible el campo magnético, dado que las partículas, debido a la fuerza ejercida sobre ellas, se disponen en determinadas líneas que se denominan *líneas de campo*, *de fuerza* o *de inducción*. Sin embargo, estas líneas pueden emplearse únicamente para describir cualitativa y cuantitavivamente el campo, pero físicamente no representan nada real.

El espacio comprendido entre dos líneas de fuerza está sometido también a la acción del campo. Se asignan a las líneas las propiedades siguientes:

1) Las líneas de fuerza son trayectorias cerradas sin principio ni fin; fuera del imán su dirección se fija del polo norte al polo sur.
2) La densidad de líneas de fuerza indica la intensidad del campo magnético.
3) La entrada y la salida de las líneas de fuerza en los trozos de hierro tienen lugar siempre perpendicularmente a la superficie del mismo.

La Figura 9-1 muestra un imán con sus correspondientes líneas de campo.

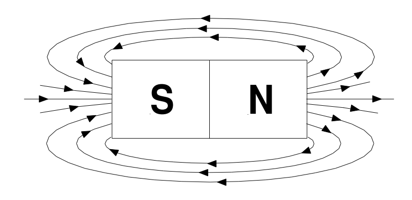


Figura 9-1 Líneas de campo de un imán

9.2 Efectos magnéticos de la corriente

Al establecer una corriente continua en una bobina, como se ve en la Figura 9-2, se produce un campo magnético en el interior de la misma, cuyas líneas de campo o líneas de inducción tienen la dirección y el sentido indicado. Dichos dirección y sentido se obtienen fácilmente con la *regla del tirabuzón*, que se ilustra a la derecha de la mencionada figura.

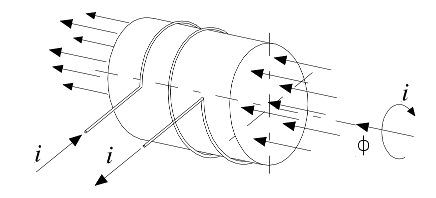


Figura 9-2 Corriente en una bobina que da lugar a un campo magnético

Pero el campo magnético existe también en el exterior de la bobina, aun cuando sus efectos son mucho más débiles, de lo que se deduce que es necesaria otra magnitud para dejarlo completamente determinado en todos los puntos del espacio en donde aparece. Esta magnitud es la *inducción magnética* o *densidad de flujo* que se indica con la letra B y se mide en *tesla* $[\mathrm{T}]$.

En definitiva, un campo magnético tiene, en cada punto donde existe, una dirección, un sentido y una magnitud. La dirección y el sentido del mismo se determinan con el sentido de la corriente que lo provoca, y la magnitud está dada por la inducción magnética en una cierta escala relativa que se ha fijado como referencia.

En algunos casos, en lugar de emplear la inducción magnética, se emplea el *flujo magnético* o *flujo de inducción* para señalar la acción magnética total en una superficie dada, que se indica con la letra ϕ y se mide en *weber* $[\mathrm{Wb}]$. La relación correspondiente es:

$$\phi = B \cdot S \qquad \text{Ec. 9-1}$$

donde ϕ : flujo magnético en $[\mathrm{Wb}]$

B : inducción magnética en $[\mathrm{T}]$

S : sección recta de interés, perpendicular al flujo en $\left[\mathrm{m}^2\right]$

La Ec. 9-1 es válida si la inducción es constante en cualquier parte de la sección S considerada.

La Figura 9-3 muestra el llamado *anillo de Rowland*, consistente en un anillo circular sobre el cual están arrolladas en forma perfectamente uniforme y compacta N espiras por las que se encuentra la corriente i, denominada *corriente magnetizante*. Por métodos experimentales o analíticos, cuyo análisis se deja para el lector a partir de la ley de Ampere, se puede establecer que la inducción en el anillo vale:

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot i}{l} \qquad \text{Ec. 9-2}$$

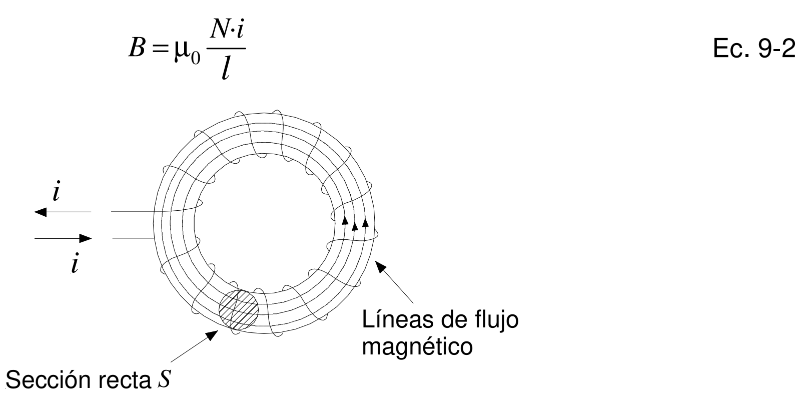


Figura 9-3 Anillo de Rowland

El valor de B es la inducción magnética en $[\mathrm{T}]$ y, si el anillo está arrollado en el vacío, el valor μ_0 se denomina *permeabilidad absoluta* o *permeabilidad del vacío*, y las mediciones físicas más ajustadas han dado como resultado el valor $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} [\mathrm{H/m}]$.

Si N es el número de espiras del anillo, i es la corriente presente en la bobina y l el largo de la línea media magnética (línea promedio de todas las líneas de inducción existentes), se define la magnitud H como:

$$H = \frac{N \cdot i}{l} \qquad \text{Ec. 9-3}$$

que se denomina *intensidad de campo* o *excitación magnética*. Dados i en *ampere* $[\mathrm{A}]$ y l en *metro* $[\mathrm{m}]$, H se mide en *ampere vuelta por metro* o simplemente en *ampere por metro* $[\mathrm{A/m}]$.

Si, en lugar del anillo de Rowland, tomamos una bobina recta en el vacío como ilustra la Figura 9-4, el valor de B en el centro de la bobina cumple con bastante aproximación la Ec. 9-2. Combinando las expresiones de las Ec. 9-2 y Ec. 9-3 se obtiene la relación $B = \mu_0 H$, que es lineal debido a que μ_0 es una constante.

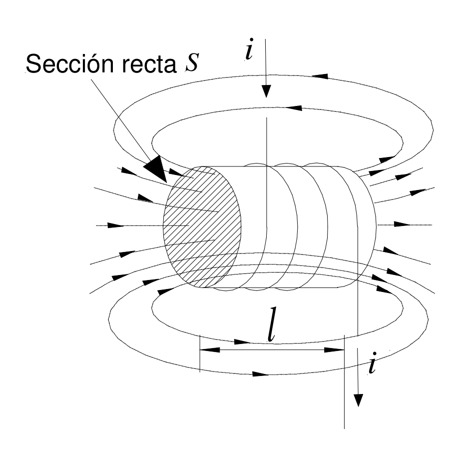


Figura 9-4 Bobina recta

9.3 Materiales ferromagnéticos

Si la bobina de la Figura 9-4 se encuentra arrollada sobre un núcleo de hierro como muestra la Figura 9-5, las líneas de campo se “encauzan” por él; y las experiencias revelan que el valor de B cambia, y la Ec. 9-2 se transforma en la siguiente:

$$B = \mu \frac{N \cdot i}{l} \qquad \text{Ec. 9-4}$$

donde $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

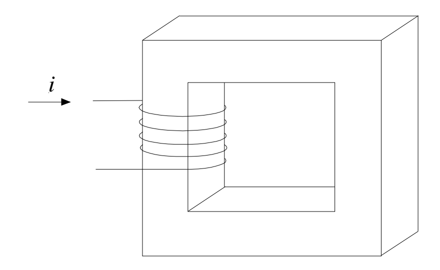


Figura 9-5 Bobina enrollada sobre un núcleo de hierro

El número μ_r no es más que un coeficiente adimensional que indica la relación entre la permeabilidad del vacío μ_0 y la permeabilidad μ de la sustancia colocada en el campo magnético, y se denomina *permeabilidad relativa*.

Combinando las Ec. 9-3 y Ec. 9-4 resulta:

$$B = \mu H \qquad \text{Ec. 9-5}$$

El valor de μ, a diferencia del coeficiente μ_0, *no es constante* para materiales ferromagnéticos y su variación resulta en una relación *no lineal* entre B y H.

En la Figura 9-6 se muestran las denominadas *curvas de imantación* $B = f(H)$ con las cuales se trabaja normalmente en el cálculo de los circuitos magnéticos.

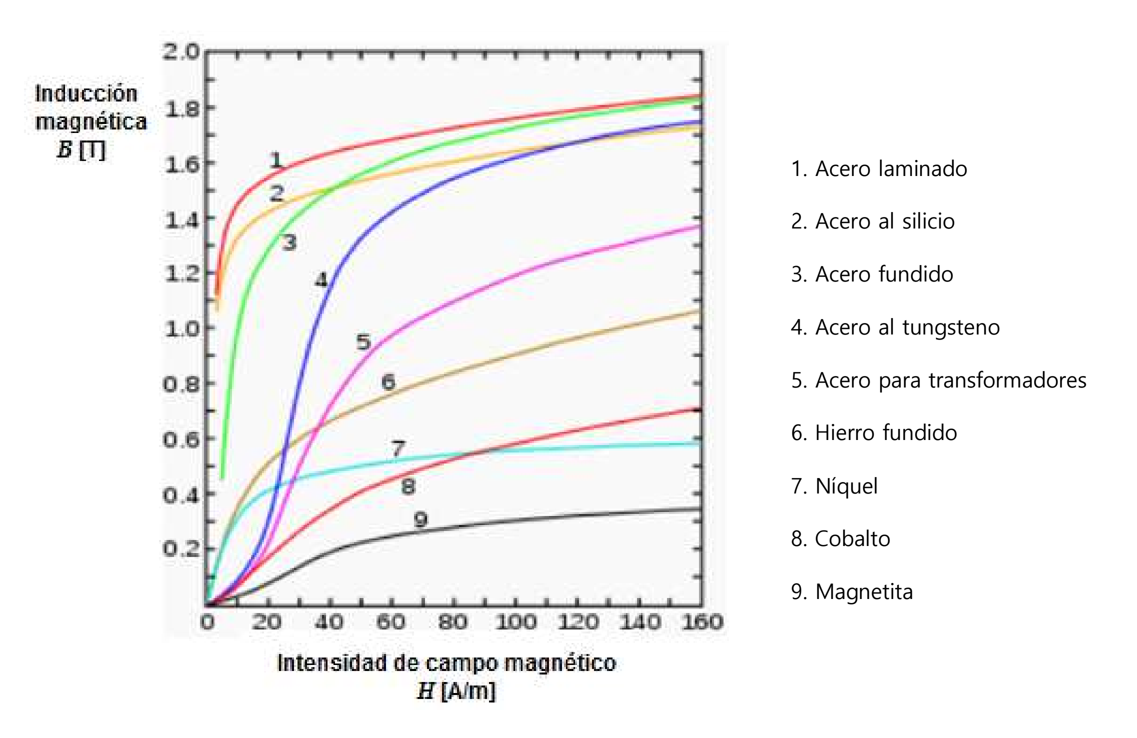


Figura 9-6 Curvas de imantación para diferentes materiales ferromagnéticos

9.4 Ley de Hopkinson

Si se reemplaza la Ec. 9-4 en la Ec. 9-1 queda: $\phi = B \cdot S = \mu \frac{N \cdot i}{l} S$ y, reordenando se tiene la *ley de Hopkinson* como muestra la Ec.15-6

$$\phi = N \cdot i \Big/ \frac{l}{\mu \cdot S} \qquad \text{Ec. 9-6}$$

Al valor $N \cdot i$ se lo suele llamar *fuerza magnetomotriz*, cuya unidad es el *ampere-vuelta* $[\mathrm{Av}]$, y a veces se lo indica como fmm; mientras que a $\frac{l}{\mu \cdot S}$ se lo llama *reluctancia*, y se indica con $\mathscr{R}$.

La Ec. 9-6 adopta entonces la forma $\phi = \frac{fmm}{\mathscr{R}}$ que, por su analogía con la ley de Ohm para circuitos eléctricos, se conoce también como *ley de Ohm para circuitos magnéticos*.

La característica alineal de μ respecto de B ocasiona algunas dificultades para la resolución de los circuitos magnéticos, a saber:

a) Si el flujo ϕ es dato, se puede determinar inmediatamente $B = \frac{\phi}{S}$ y, con el uso del gráfico $B - H$, se determina el valor de H, y consecuentemente μ. La reluctancia $\mathscr{R}$ se obtiene mediante la relación $\mathscr{R} = \frac{l}{\mu \cdot S}$. Conociendo el número de espiras de la bobina en estudio, el valor de la corriente i se calcula aplicando directamente la ley de Hopkinson. Muchas veces se denomina a esta situación *problema directo*.

b) Si la corriente i es dato (lo mismo que decir que la fmm es dato), la determinación del flujo ϕ requiere un cálculo por aproximaciones; es decir, se supone un valor de flujo, luego se calcula B, μ y $\mathscr{R}$. Luego, con el valor de $N \cdot i$ resultante se verifica el valor del flujo supuesto y, si se requiere, se corrige dicho valor. El proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta obtener el resultado con valores por debajo del error deseado. Esta situación se suele denominar *problema inverso*.

Otra forma de resolución del mismo problema contempla un método gráfico. Muchas veces se combinan ambos métodos para hallar determinada solución.

La Foto 9-1 muestra el núcleo de un circuito magnético en construcción, correspondiente a un transformador trifásico de potencia de alta tensión. La Foto 9-2 presenta un circuito magnético correspondiente a un transformador de medición de tensión, en el cual se observa el núcleo magnético laminado y uno de los arrollamientos (de baja tensión).

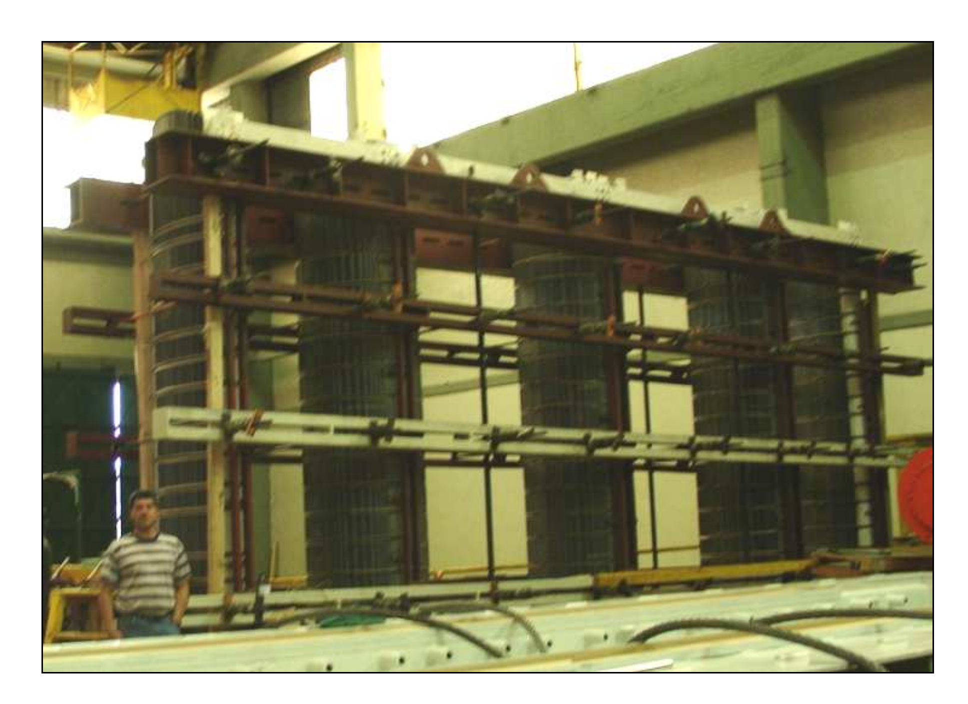


Foto 9-1 Núcleo magnético de un transformador trifásico de potencia



Foto 9-2 Circuito magnético de un transformador de medición

9.5 Leyes de Kirchhoff para circuitos magnéticos

Junto a la ley de Hopkinson se verifican, para un circuito magnético, las siguientes leyes:

a) La suma algebraica de los flujos magnéticos en un nudo del circuito es igual a cero.

$$\sum_j \phi_j = 0$$

b) La suma algebraica de las fuerzas magnetomotrices en una malla de un circuito es igual a la suma algebraica de las *tensiones magnéticas* en dicha malla.

$$\sum_m fmm_m = \sum_n H_n \cdot l_n$$

Estas leyes se conocen como *primera y segunda ley de Kirchhoff para circuitos magnéticos*, en la cual las *tensiones magnéticas* se refieren a los productos $H \cdot l$.

9.6 Circuito magnético con entrehierro

La Figura 9-7 representa un circuito magnético simple con *entrehierro*. Se denomina *entrehierro* a una sección de aire de longitud muy pequeña situada en el camino magnético del material ferromagnético que conforma el núcleo, de tal forma que introduce una discontinuidad en dicho material.

Para resolver el mismo debe tenerse presente que la permeabilidad magnética es diferente en el hierro que en el entrehierro (aire).

Dado que el flujo es el mismo para todo el circuito (una sola malla), el valor de B en cualquier parte del hierro de sección S constante vale $B = \phi / S$.

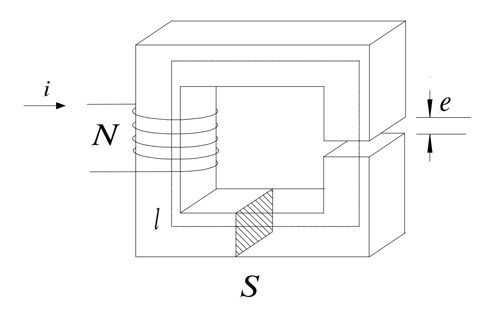


Figura 9-7 Circuito magnético con entrehierro

En el entrehierro se comprueba que las líneas de inducción se expanden como se muestra en la Figura 9-8, con lo que la sección del entrehierro S_e resulta algo mayor que S, y el valor de B en el entrehierro resulta $B_e = \phi / S_e$. Sin embargo, para valores de e suficientemente pequeños, se considera $B = B_e$, simplificándose los cálculos correspondientes.

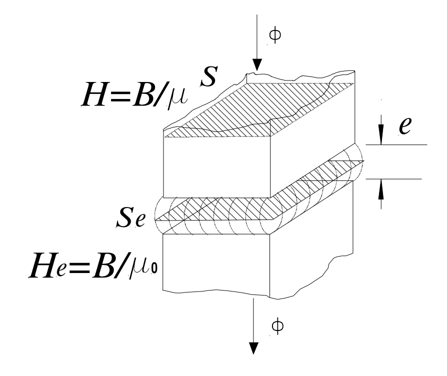


Figura 9-8 Expansión de las líneas de inducción en el entrehierro

El valor de H en el hierro es $H = B/\mu$, mientras que en el entrehierro resulta $H_e = B/\mu_0$.

Haciendo uso de las “leyes de Kirchhoff para circuitos magnéticos”, se obtiene la siguiente relación:

$$N{\cdot}i = H{\cdot}l + H_e{\cdot}e$$

9.7 Energía almacenada en el campo magnético

Recordando que cuando se establece una corriente i en las N espiras de una inductancia L, la energía cedida al campo magnético está dada por la expresión

$$W = \frac{1}{2}L{\cdot}i^2$$

y teniendo en cuenta que, por definición, $L = \frac{N{\cdot}\phi}{i}$; y que $N{\cdot}i = H{\cdot}l$ y $\phi = B{\cdot}S$, se concluye que

$$W = \frac{1}{2}H{\cdot}B{\cdot}l{\cdot}S$$

es decir que

$$\frac{W}{l{\cdot}S} = \frac{1}{2}H{\cdot}B = \frac{1}{2}\mu{\cdot}H^2$$

que representa la energía almacenada en el volumen de altura l y sección S, recorrido y atravesado respectivamente por el flujo magnético ϕ.

9.8 Magnitudes de campo magnético

Mediante estudios minuciosos se ha comprobado que existe una amplia analogía entre las magnitudes eléctricas y las magnéticas, algunas de las cuales ya se han presentado. La Tabla 9-1 resume esta analogía que facilita el estudio de los circuitos magnéticos a partir de la construcción de un circuito eléctrico equivalente.

Tabla 9-1 Analogías entre circuitos eléctricos y magnéticos

Electricidad	Magnetismo
Corriente eléctrica I	Flujo magnético ϕ
Fuerza electromotriz $fem = U_f$	Fuerza magnetomotriz $fmm = N \cdot i$
Tensión eléctrica U	Tensión magnética $H \cdot l$
Resistencia R	Reluctancia $\mathscr{R}$
Ley de Ohm $I = \frac{U}{R}$	Ley de Hopkinson $\phi = \frac{H \cdot l}{\mathscr{R}}$
Conductividad $\sigma = \frac{1}{\rho}$	Permeabilidad μ
Expresión de la resistencia $U = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma \cdot S}$	Expresión de la reluctancia $\mathscr{R} = \frac{l}{\mu \cdot S}$
Densidad de corriente $J = \frac{I}{S}$	Densidad de flujo $B = \frac{\phi}{S}$
Leyes de Kirchhoff “eléctricas” $\sum_k I_k = 0$ $\sum_m U_{fm} = \sum_n I_n \cdot R_n$	Leyes de Kirchhoff “magnéticas” $\sum_k \phi_k = 0$ $\sum_m fmm_m = \sum_n H_n \cdot l_n$
Circuito eléctrico	Circuito magnético

APÉNDICE A

Transformaciones Triángulo- Estrella y Estrella-Triángulo

En la Figura A-1 se transcriben los circuitos de las Figuras 3-10 y 3-11 cuya equivalencia se determina por la Transformación de Kennelly y que a continuación se demostrará considerándolos como sendos cuadripolos (Capítulo 4).

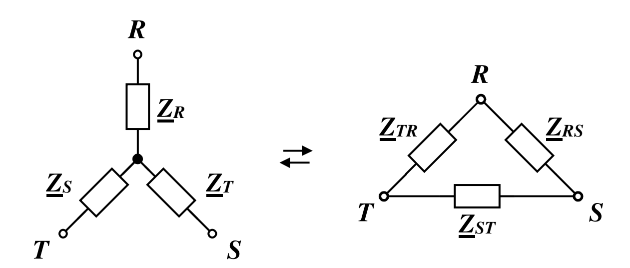


Figura A-1: Transformación Δ –Y y Y – Δ

Reordenada la topología de la Figura A-1 se obtienen los circuitos de la Figura. A-2:

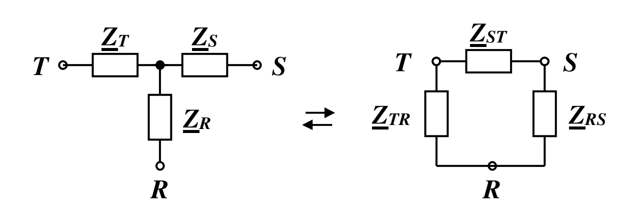


Figura A-2: Configuraciones de la Figura A-1 vistos como cuadripolos

La determinación de los parámetros de impedancia para el circuito de la izquierda son los de la Ec. A-1.

$$\underline{z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \underline{Z}_T + \underline{Z}_R$$

$$\underline{z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_S + \underline{Z}_R \qquad \text{Ec. A-1}$$

$$\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_R$$

La misma determinación para el circuito de la derecha da lo mostrado en la Ec. A-2.

$$\underline{z}_{11} = \frac{\underline{Z}_{TR}\left(\underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{RS}\right)}{\underline{Z}_{TR} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{RS}}$$

$$\underline{z}_{22} = \frac{\underline{Z}_{RS}\left(\underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}\right)}{\underline{Z}_{TR} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{RS}} \qquad \text{Ec. A-2}$$

$$\underline{z}_{21} = \underline{z}_{12} = \frac{\underline{Z}_{TR} \cdot \underline{Z}_{RS}}{\underline{Z}_{TR} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{RS}}$$

Operando con la igualdad de la Ec. A-1 y la Ec. A-2 resultan las equivalencias de la Ec. A-3 iguales respectivamente a la Ec. 3-11, Ec. 3-12 y Ec. 3-13.

$$\underline{Z}_{R} = \frac{\underline{Z}_{ST} \cdot \underline{Z}_{RS}}{\underline{Z}_{TR} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{RS}}$$

$$\underline{Z}_{S} = \frac{\underline{Z}_{TR} \cdot \underline{Z}_{ST}}{\underline{Z}_{TR} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{RS}} \qquad \text{Ec. A-3}$$

$$\underline{Z}_{T} = \frac{\underline{Z}_{RS} \cdot \underline{Z}_{TR}}{\underline{Z}_{TR} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{RS}}$$

Observando la Ec. A-3 puede decirse también que se cumple que:

La impedancia que concurre a un vértice de la estrella es igual al producto de las dos que concurren al mismo vértice en el triángulo, dividido por la suma de las tres impedancias del triángulo.

El pasaje de la estrella al triángulo seria la versión dual de anterior por lo que deberán calcularse los parámetros de admitancia para cada uno de los cuadripolos de la Figura A-2 y repitiendo el mismo proceder se termina en:

$$\underline{Y}_{TR} = \frac{\underline{Y}_{T} \cdot \underline{Y}_{R}}{\underline{Y}_{R} + \underline{Y}_{S} + \underline{Y}_{T}}$$

$$\underline{Y}_{RS} = \frac{\underline{Y}_{R} \cdot \underline{Y}_{S}}{\underline{Y}_{R} + \underline{Y}_{S} + \underline{Y}_{T}} \qquad \text{Ec. A-4}$$

$$\underline{Y}_{ST} = \frac{\underline{Y}_{S} \cdot \underline{Y}_{T}}{\underline{Y}_{R} + \underline{Y}_{S} + \underline{Y}_{T}}$$

Invirtiendo las expresiones de la Ec. A-4 resultan las Ec. 3-14, Ec. 3-15 y Ec. 3-16. Sin embargo viendo las mismas como admitancias resultan más sencillas y determinan la versión dual del recuadro anterior:

La admitancia que une dos vértices del triángulo es igual al producto de las dos que concurren a los mismos vértices en la estrella, dividido por la suma de las tres admitancias de la estrella.

APÉNDICE B
Serie de Fourier

Fourier descubrió durante sus investigaciones sobre problemas de flujo de calor que una función periódica se puede describir como una suma infinita de funciones seno y/o coseno armónicamente relacionadas.

En este apéndice se resumen las fórmulas matemáticas que permiten determinar los coeficientes presentes en dicha suma.

B.1 Desarrollo en series de Fourier de funciones periódicas

Dada la función $x(t)$ periódica de período $T = 1/f$, o sea que $x(t) = x(t+T)$, dicha función puede expresarse analíticamente como la suma infinita de funciones senoidales y/o cosenoidales de pulsación múltiplo entero o armónico de la pulsación fundamental $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ como muestra la Ec. B-1

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, sen(k\omega t) \qquad \text{Ec. B-1}$$

Los coeficientes a_0, a_k y b_k vienen dados respectivamente por las formulas siguientes

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt \qquad \text{Ec. B-2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot cos(k\omega t)\, dt \qquad \text{Ec. B-3}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot sen(k\omega t)\, dt \qquad \text{Ec. B-4}$$

El coeficiente a_0 representa el valor medio de la función periódica $x(t)$ pudiendo ser nulo.

Por otro lado $x(t)$ debe cumplir las siguientes *condiciones de Dirichlet* para asegurar que la misma se pueda expresar como una serie de Fourier:

- Si $x(t)$ es discontinua en el período T, entonces debe tener un número finito de discontinuidades en dicho período.
- Debe ser $\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} |x(t)|\, dt$ convergente o sea $x(t)$ absolutamente integrable en un período de la misma
- Debe tener un número finito de máximos y mínimos en el período T.

Existen formas más compactas de la serie de Fourier dada en la Ec. B-1, que son relativamente fáciles de demostrar y que pueden ser útiles en el análisis de circuitos, las que se muestran a continuación:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, cos(k\omega t - \theta_k)$$
$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \theta_k = arctg\left(b_k/a_k\right) \qquad \text{Ec. B-5}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, sen(k\omega t - \phi_k)$$
$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \phi_k = arctg\left(a_k/b_k\right) \qquad \text{Ec. B-6}$$

B.2 Condiciones de simetría que anulan términos de la serie

Existen simetrías que simplifican la tarea de calcular los coeficientes de la *serie de Fourier*.

En la Tabla B-1 se presentan tres casos que suelen ser los más frecuentes en las aplicaciones de señales poliarmónicas.

Tabla B-1: Formulas de cálculo de los coeficientes de Fourier según la simetría

Simetría	a_0	a_k	b_k
de función par $f(t)=f(-t)$	$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$	$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot cos(k\omega t)\, dt$	$0 \;\; \forall k$
de función impar $f(t)=-f(-t)$	0	$0 \;\; \forall k$	$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot sen(k\omega t)\, dt$
de ½ onda $f(t)=-f(-T/2)$	0	$0 \;\; \forall k$ par	$0 \;\; \forall k$ par
		$\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cdot cos(k\omega t)\, dt$ $0 \;\; \forall k$ impar	$\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cdot sen(k\omega t)\, dt$ $0 \;\; \forall k$ impar

APÉNDICE C
Resolución gráfica de circuitos

En ciertos casos, la resolución de un circuito por métodos analíticos resulta compleja y a veces muy tediosa. Es el caso de circuitos cuyos componentes poseen características no lineales. En estas circunstancias, pretender resolver un circuito de este tipo mediante un sistema de ecuaciones no lineales implica utilizar métodos iterativos de aproximaciones sucesivas.

En la actualidad, el masivo uso de las computadoras podría verse como una ventaja ante esta situación, dadas la capacidad de cálculo y velocidad de las mismas. Ésto es cierto, siempre y cuando se justifique la elaboración de un programa que se pueda utilizar un número suficiente de veces que compense el tiempo de programación. De lo contrario, si la necesidad de resolución de un dado problema se da una única vez, la combinación de un método gráfico de resolución y una simple iteración pueden dar lugar a una solución aceptable desde el punto de vista numérico y ventajosa con relación a los tiempos invertidos en la tarea.

Siguiendo dicha línea de pensamiento, en este apéndice se presenta un método gráfico para el planteo y resolución de sistemas no lineales. Se inicia con el estudio de sistemas lineales simples conformados por circuitos eléctricos en continua, con el objeto de comparar la resolución gráfica con la analítica; avanzando hacia sistemas más complejos. A continuación, los conceptos desarrollados se aplican a sistemas no lineales, particularmente circuitos magnéticos, recordando la analogía de éstos con los eléctricos, como se vio en el capítulo 9.

Se debe aclarar que la teoría aquí expuesta para sistemas no lineales es aplicable a cualquier tipo de circuitos de estas características.

C.1 Sistemas lineales. Circuito eléctrico

C.1.1 Circuito eléctrico compuesto por una fuente de tensión real y una carga resistiva

Se analizará un circuito lineal simple compuesto por una fuente de tensión con su resistencia interna en serie y una resistencia de carga, según se muestra en la Figura C-1.

R_i

$\overrightarrow{I_c}$

U_f R_c

Figura C-1 Circuito eléctrico lineal con fuente real y carga resistiva

Las ecuaciones Ec. C-1 y Ec. C-2 representan el funcionamiento del circuito.

$$U_f = U_{Ri} + U_{Rc} = I_c \cdot R_i + I_c \cdot R_c = I_c \cdot (R_i + R_c) \qquad \text{Ec. C-1}$$

con

$$I_c = \frac{U_f}{(R_i + R_c)} \qquad \text{Ec. C-2}$$

y

$$\frac{I_c}{U_f} = \frac{1}{(R_i + R_c)} \qquad \text{Ec. C-3}$$

Se puede hacer una representación gráfica de la situación planteada (Figura C-2).

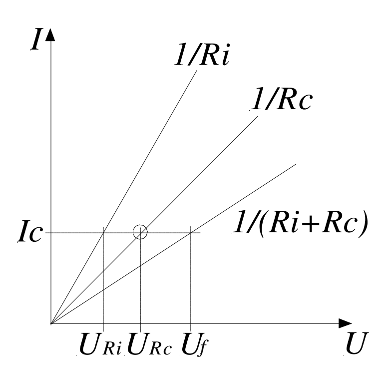


Figura C-2 Representación gráfica de las Ec. C-1, Ec. C-2 y Ec. C-3

en donde las rectas $1/R_i$ y $1/R_c$ corresponden a las características $I - U$ de los resistores respectivos; observándose, además, que la recta $1/(R_i + R_c)$ es la suma gráfica de las rectas $1/R_i$ más $1/R_c$ a "corriente constante", es decir que se suman sus correspondientes valores del eje U para cada valor de I; resultando que dicha composición gráfica corresponde a las

dos resistencias en serie, dando origen a una característica equivalente $I-U$ que representa la suma de R_i más R_c.

Con esta construcción gráfica puede determinarse la corriente I_c de la malla completa a partir del valor de $U=U_f$ sobre la recta $1/(R_i+R_c)$. De la misma forma, se pueden determinar las de tensión sobre R_i y R_c tal como se observa en el gráfico, cuya suma debe resultar igual a U_f. También se puede observar en la Figura C-2 que el segmento $\overline{U_{Rc}U_f}$ resulta igual a U_i.

Otra forma de resolver el problema es introduciendo el concepto de *característica de regulación* de la fuente real conformada por U_f y R_i. Para ello supóngase ahora que el circuito de la Figura C-1 se separa en sus dos elementos componentes, la fuente real y el resistor de carga, tal como muestra la Figura C-3.

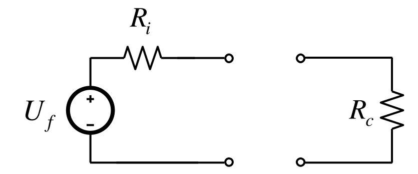


Figura C-3 Esquema para describir el concepto de característica de regulación de una fuente de tensión

La representación gráfica de cada uno de dichos elementos componentes se muestra en la Figura C-4.

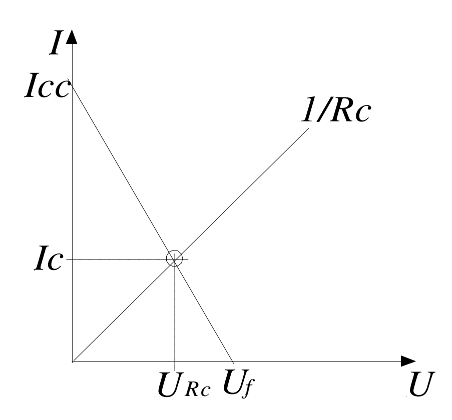


Figura C-4 Representación gráfica del comportamiento de la fuente de tensión real y del resistor de carga

En este punto, no deberían quedar dudas respecto de la representación de la resistencia de carga; pero debe hacerse una mención especial en el caso de la fuente real, la cual está representada en el gráfico por su característica de regulación.

La característica de regulación de una fuente de tensión real describe el funcionamiento de la misma para todas las condiciones de carga posibles, desde el circuito abierto hasta el cortocircuito. En estos dos extremos, resulta simple visualizar gráficamente las respectivas situaciones (Figura C-5).



Figura C-5 Condiciones extremas de la característica de regulación de la fuente de Figura C-1.

Se puede verificar rápidamente que para la Figura C-5a) resulta $U_c = U_f$, pues $I_c = 0$ (circuito abierto), mientras que para la Figura C-5b) $I_c = I_{cc} = U_f / R_i$, pues $U_c = 0$ (corto circuito). Para cualquier caso intermedio vale $U_f = I_c \cdot R_i + U_c$, suponiendo que U_c es la tensión en un resistor de carga R_c conectado en bornes de la fuente real, por efecto de la corriente I_c. Debe quedar claro que la pendiente de la recta que representa la característica de regulación de la fuente es igual a la inversa de R_i.

Entonces, dadas las representaciones de la fuente y la carga presentadas en la Figura C-4, la intersección de la recta de carga R_c y la característica de regulación de la fuente real, determina el "punto de funcionamiento" del circuito, cuyas coordenadas son U_{Rc} e I_c.

Si se incorpora al gráfico de la Figura C-4 la recta de carga definida por la resistencia interna de la fuente R_i, la abscisa correspondiente al valor de la corriente I_c para dicha recta resulta coincidente con la tensión en R_i, verificándose que U_{Ri} más U_{Rc} coincide con U_f, como era de esperar (Figura C-6).

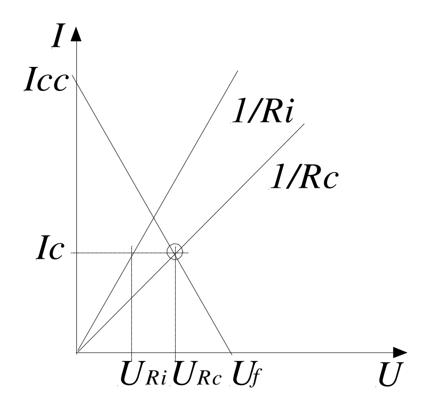


Figura C-6 Representación gráfica del comportamiento del circuito, incluyendo la característica de regulación de la fuente de tensión real, su resistencia interna y el resistor de carga

Se pueden analizar circuitos cada vez más complejos, incorporando más ramas en serie y/o en paralelo, o más fuentes de tensión; algunos de cuyos casos se presentan en las secciones que siguen.

C.1.2 Circuito eléctrico compuesto por una fuente de tensión real y dos cargas resistivas conectadas en paralelo

El presente caso pretende ilustrar acerca de cómo debe operarse gráficamente para obtener el punto de funcionamiento del circuito; es decir, cómo determinar las corrientes de las diferentes ramas, suponiendo como dato los elementos pasivos y la tensión de la fuente. De más está decir que si el dato fuera alguna de las corrientes con la fuente incógnita, también debería poder obtenerse una solución.

Supóngase el circuito de la Figura C-7.

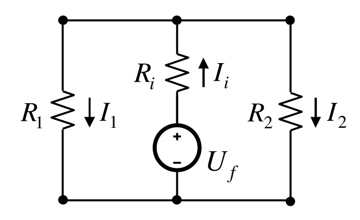


Figura C-7 Circuito con fuente real y dos resistores en paralelo

Como se detalló en el apartado anterior, deben graficarse las características de los elementos pasivos y la curva de carga de la fuente de tensión, Figura C-8.

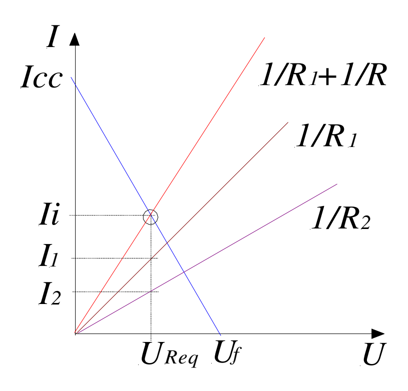


Figura C-8 Representación gráfica del funcionamiento del circuito de la Figura C-7

La recta $1/R_1 + 1/R_2$ representa el equivalente paralelo de R_1 y R_2 (Figura C-9), lo cual se obtiene gráficamente sumando las respectivas características a "tensión constante", es decir que se suman sus correspondientes valores del eje I para cada valor de U.

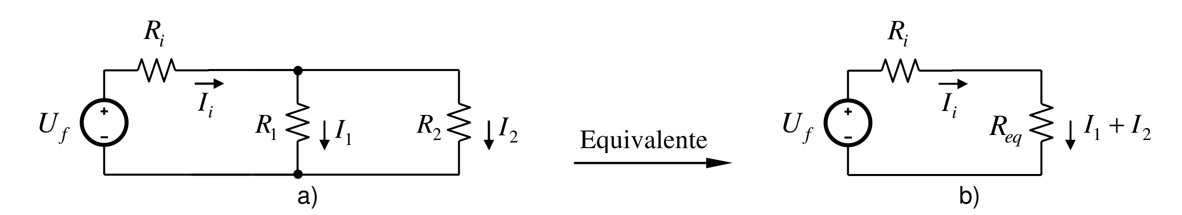


Figura C-9 Equivalente paralelo a partir del circuito de la Figura C-7

La intersección de la característica de regulación y la del equivalente paralelo determina el punto de funcionamiento del circuito (corriente de la fuente). A partir de éste, se pueden obtener las corrientes de cada rama pasiva, prolongando la proyección de dicho punto de funcionamiento hasta cortar las rectas de $1/R_1$ y $1/R_2$, definiendo sobre el eje vertical las corrientes de las ramas de R_1 y R_2. En esta condición, es posible verificar claramente que $I_i = I_1 + I_2$, además que $U_f = U_{Req}$.

C.1.3 Circuito eléctrico compuesto por la conexión paralelo de dos fuentes de tensión reales y una carga resistiva

Fuentes en paralelo con la misma polaridad

La Figura C-10 muestra un resistor conectado en paralelo con dos fuentes de tensión, también en paralelo y con las mismas polaridades respecto de los bornes AB.

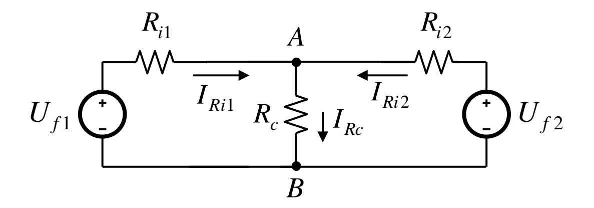


Figura C-10 Dos fuentes reales y un resistor en paralelo.

Es posible determinar la fuente equivalente vista desde AB por el resistor de carga R_c, tal como se ve en la Figura C-11.

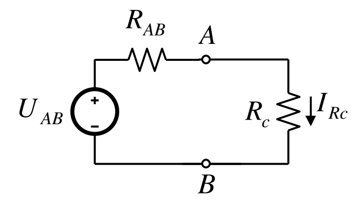


Figura C-11 Circuito de la Figura C-10 con una fuente de tensión reall equivalente.

Esta fuente equivalente se determina mediante el método de Thevenin, cuyos parámetros resultan los indicados en las Ec. C-4 y Ec. C-5.

$$U_{AB} = \frac{U_{f2} \cdot R_{I_1} + U_{f1} \cdot R_{I_2}}{R_{I_1} + R_{I_2}} \qquad \text{Ec. C-4}$$

$$R_{AB} = \frac{R_{I_1} \cdot R_{I_2}}{(R_{I_1} + R_{I_2})} \qquad \text{Ec. C-5}$$

La corriente de cortocircuito de esta fuente equivalente resulta del cociente entre U_{AB} y R_{AB}, y resulta en la Ec. C-6.

$$I_{cc} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{U_{f1}}{R_{I_1}} + \frac{U_{f2}}{R_{I_2}} = I_{cc_1} + I_{cc_2} \qquad \text{Ec. C-6}$$

donde se verifica, además, que la corriente de cortocircuito de la fuente equivalente es la suma de las corrientes de cortocircuito de cada fuente individual. La importancia de este resultado radica en la forma de determinación de la característica de la fuente equivalente en forma gráfica, como se verá más adelante.

Seguidamente, en la Figura C-12, se grafican las características individuales de las fuentes 1 y 2 y de la recta de carga. Se supone que $U_{f1} > U_{f2}$ y $R_{I_1} > R_{I_2}$.

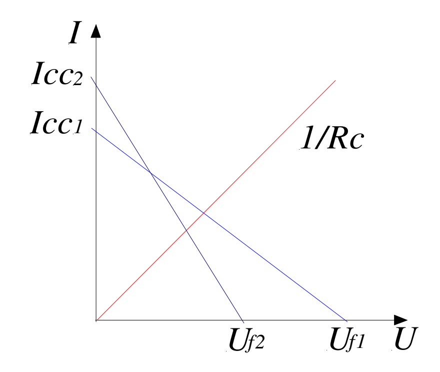


Figura C-12 Representación de las características de regulación de las fuentes y de la característica del resistor de carga

A partir de la Figura C-12 y de lo expuesto para el cálculo de la fuente equivalente de Thevenin, se puede determinar la característica equivalente de dicha fuente en forma gráfica. Se describirá sobre la Figura C-13 lo antedicho.

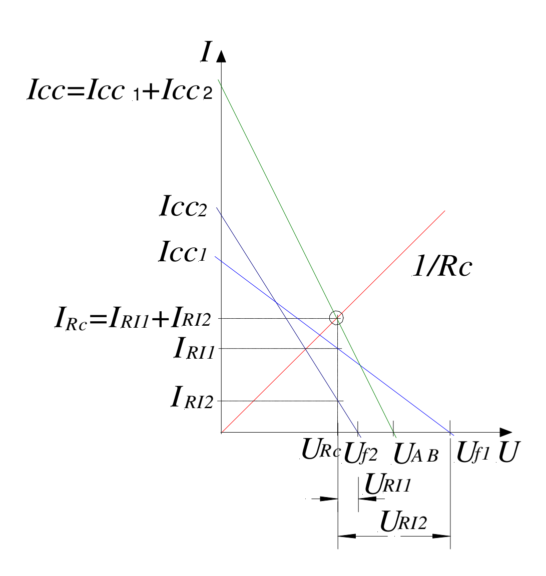


Figura C-13 Representación de la fuente equivalente de Figura C-11.

La recta de la fuente equivalente se obtiene de la siguiente manera: a partir de los resultados del análisis por el método de Thevenin, la corriente de cortocircuito equivalente I_{cc} se obtiene como la suma de las corrientes de cortocircuito de cada fuente individual I_{cc_1} e I_{cc_2}, es decir que en el gráfico *se suman directamente dichos valores de corriente cortocircuito sobre el eje* I *, resultando que dicho valor es* I_{cc} *sobre dicho eje*. A continuación, la pendiente de dicha característica se determina sabiendo que R_{AB} es la resistencia equivalente del paralelo de las resistencias internas de las fuentes R_{I_1} y R_{I_2}, vale decir que *la suma punto a punto "a tensión constante" de las características de regulación de las fuentes 1 y 2, da como resultado la característica de regulación de la fuente equivalente*. Esta característica corta al eje U en U_{AB}, lo cual resulta lógico en baso a lo expuesto a lo largo del presente capítulo.

Alcanzado este punto, la solución del circuito o *punto de funcionamiento* del mismo resulta el indicado en el gráfico como la intersección de la recta de regulación de la fuente equivalente y la recta de carga de R_c; y es la solución del circuito de la Figura C-11.

El lector puede verificar que los valores restantes indicados en el gráfico de la Figura C-13 corresponden a las diferentes corrientes y tensiones que completan la solución del circuito completo original de la Figura C-10.

Como corolario de la situación planteada, se puede afirmar que *si el número de fuentes conectadas en paralelo es mayor que dos, la suma de las corrientes de cortocircuito de las fuentes individuales debe resultar igual a la corriente de cortocircuito de la fuente equivalente, y la resistencia interna de la fuente equivalente debe ser igual al paralelo de las resistencias internas de las fuentes individuales*; esto último, desde el punto de vista gráfico, es equivalente a sumar las características a "tensión constante".

Fuentes en paralelo con polaridad opuesta

La Figura C-14 muestra dos fuentes de tensión con polaridades opuestas conectadas en paralelo, y una posible representación de su circuito equivalente.

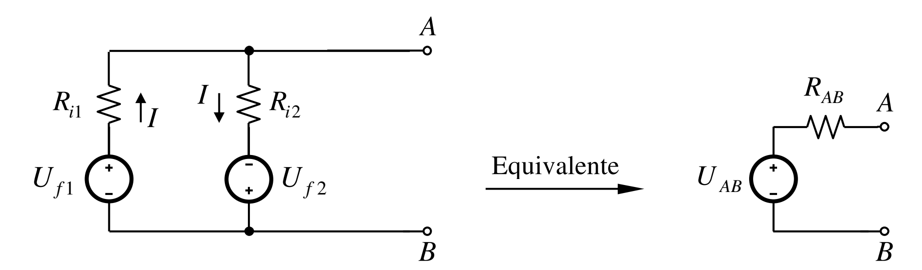


Figura C-14 Dos fuentes de tensión reales en paralelo y su equivalente.

La representación en el gráfico $I-U$ de las características de regulación de cada fuente individual que resulta se muestra en la Figura C-15.

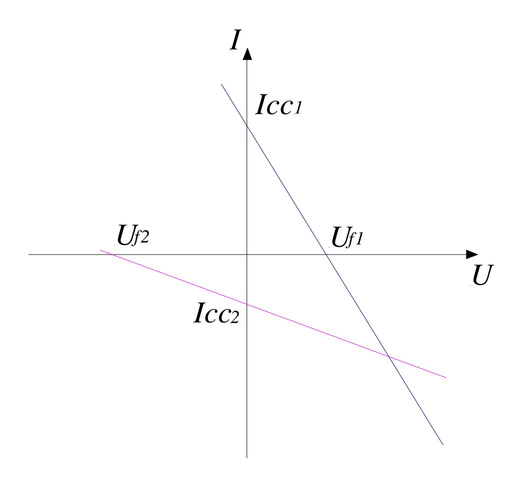


Figura C-15 Características de regulación de las dos fuentes de tensión reales de Figura C-14 y su equivalente.

La tensión de la fuente U_{f2} se sitúa en el semieje negativo de U, dado que resulta de polaridad opuesta a la de la fuente U_{f1} respecto de los bornes AB. Asimismo, la corriente de cortocircuito I_{cc_2} se encuentra sobre el semieje negativo de I, puesto que su sentido es opuesto a la corriente I_{cc_1} respecto de los bornes AB.

Al igual que en el caso anterior, se desea determinar la característica de la fuente equivalente vista desde los bornes A y B. Si se aplica el método de Thevenin, los resultados son similares a las Ec. C-4 y Ec. C-5.

$$U_{AB} = \frac{U_{f2} \cdot R_{I_1} - U_{f1} \cdot R_{I_2}}{R_{I_1} + R_{I_2}} \qquad \text{Ec. C-6}$$

$$R_{AB} = \frac{R_{I_1} \cdot R_{I_2}}{R_{I_1} + R_{I_2}} \qquad \text{Ec. C-7}$$

La corriente de cortocircuito de esta fuente equivalente se obtiene del cociente entre U_{AB} y R_{AB} y resulta la Ec. C-8.

$$I_{cc} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{U_{f1}}{R_{I_1}} - \frac{U_{f2}}{R_{I_2}} = I_{cc_1} - I_{cc_2} \qquad \text{Ec. C-8}$$

Con estos resultados se puede graficar la característica de la fuente equivalente respecto de los bornes AB, como muestra la Figura C-16.

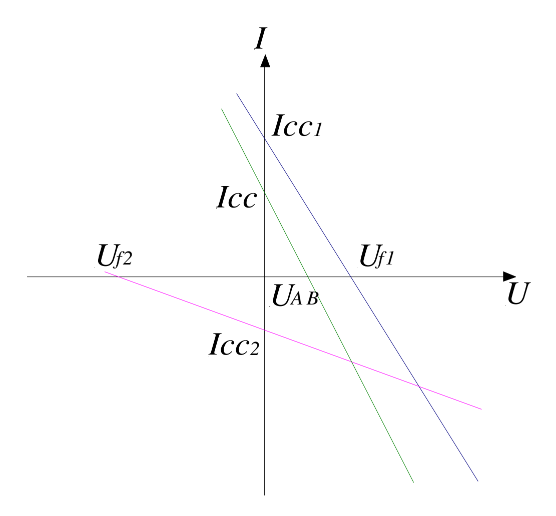


Figura C-16 Característica de la fuente equivalente del circuito de la Figura C-14.

A esta altura del análisis es posible generalizar los resultados del punto anterior de la siguiente manera:

"*si el número de fuentes conectadas en paralelo es mayor que dos, cualquiera sea la polaridad de cada una, la suma* ***algebraica*** *de las corrientes de cortocircuito de las fuentes individuales debe resultar igual a la corriente de cortocircuito de la fuente equivalente, y la resistencia interna de la fuente equivalente debe ser igual al paralelo de las resistencias internas de las fuentes individuales; esto último, desde el punto de vista gráfico, es equivalente a sumar las características a 'tensión constante*".

C.1.4 Circuito eléctrico compuesto por la conexión serie de dos fuentes de tensión reales y una carga resistiva

Para el caso de un circuito como el descripto en el título, al que le corresponde la Figura C-17, el mismo no necesita mayores explicaciones dada la sencillez del caso; sea que las fuentes tengan la misma polaridad o sean de polaridad opuesta. Ello es así, debido a que se debe observar cómo se determina la fuente equivalente de dos o más fuentes conectadas en serie: se suman las tensiones con su signo y se suman las resistencias internas.

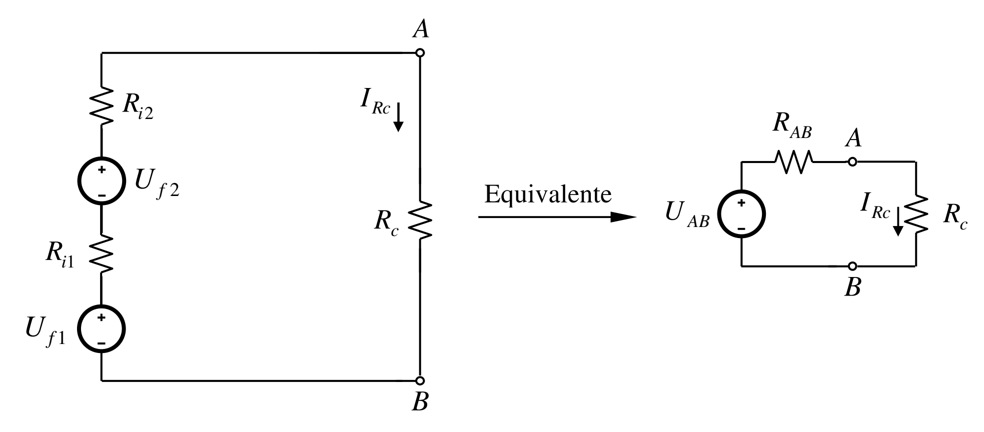


Figura C-17 Dos fuentes de tensión reales y un resistor en serie.

Los gráficos resultan según se muestra en la Figura C-18; y los resultados se obtienen operando como en casos anteriores.

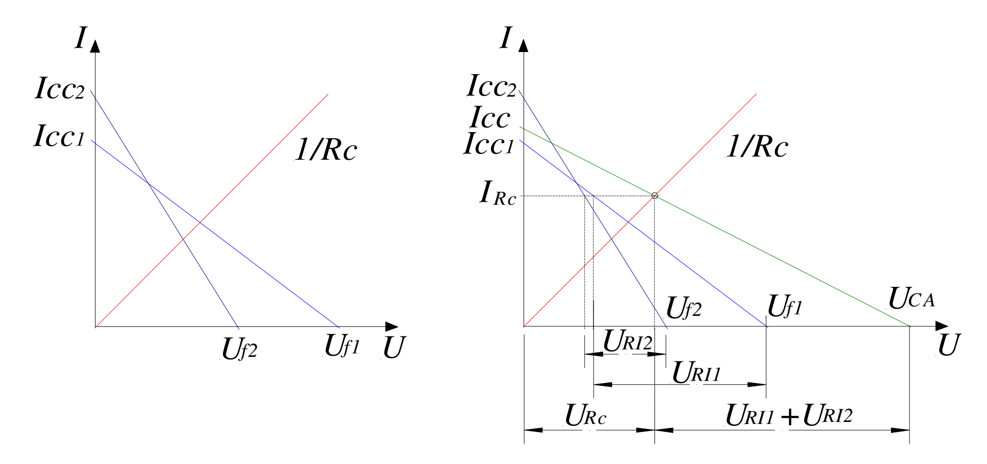


Figura C-18 Solución gráfica del circuito de la Figura C-17.

Siguiendo razonamientos expuestos, las características deben sumarse a "corriente constante", dado que las resistencias internas se encuentran en serie; y el punto de cruce de la característica equivalente con el eje U resulta de la suma algebraica de las tensiones de las fuentes individuales, y corresponde a la tensión de circuito abierto resultante.

C.2 Sistemas no lineales. Circuito magnético

En los apartados que siguen se aplicarán todas las ideas desarrolladas hasta aquí respecto de la resolución gráfica de circuitos. En particular, se aprovecharán las analogías existentes entre circuitos eléctricos y circuitos magnéticos, las cuales se hallan condensadas en la Tabla C-1 que es reproducción de la Tabla 9-1 del capítulo 9.

Tabla C-1 Analogías entre circuitos eléctricos y magnéticos

Electricidad	**Magnetismo**
Corriente eléctrica I	Flujo magnético ϕ
Fuerza electromotriz $fem = U_f$	Fuerza magnetomotriz $fmm = N \cdot i$
Tensión eléctrica U	Tensión magnética $H \cdot l$
Resistencia R	Reluctancia $\mathscr{R}$
Ley de Ohm $I = \dfrac{U}{R}$	Ley de Hopkinson $\phi = \dfrac{H \cdot l}{\mathscr{R}}$
Conductividad $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$	Permeabilidad μ
Expresión de la resistencia $U = \rho \dfrac{l}{S} = \dfrac{l}{\sigma \cdot S}$	Expresión de la reluctancia $\mathscr{R} = \dfrac{l}{\mu \cdot S}$
Densidad de corriente $J = \dfrac{I}{S}$	Densidad de flujo $B = \dfrac{\phi}{S}$

Tabla C-1 Analogías entre circuitos eléctricos y magnéticos (continuación)

Leyes de Kirchhoff "eléctricas"	Leyes de Kirchhoff "magnéticas"
$\sum_k I_k = 0$ $\sum_m U_{fm} = \sum_n I_n \cdot R_n$	$\sum_k \phi_k = 0$ $\sum_m fmm_m = \sum_n H_n \cdot l_n$
Circuito eléctrico	Circuito magnético

C.2.1 Circuito magnético compuesto por una fuente de fuerza magneto motriz y un núcleo magnético cerrado compuesto por dos materiales diferentes en serie

El circuito magnético planteado, mostrado en la Figura C-19, se puede asemejar al circuito eléctrico de la Figura C-3. En tal sentido, la resolución del circuito magnético por el método gráfico se basa en la resolución del circuito eléctrico y en las analogías de la Tabla C-1.

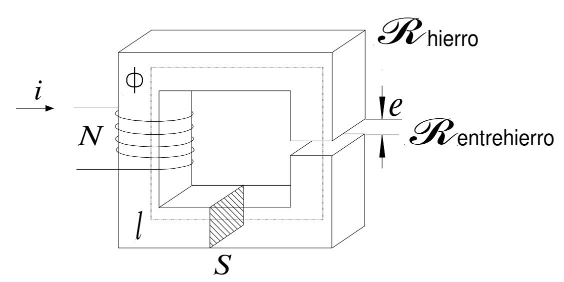


Figura C-19 Circuito magnético con una fuente de fuerza magnetomotriz y dos materiales magnéticos en serie.

Se debe observar que el circuito de la Figura C-19 presenta dos materiales magnéticos dispuestos en serie, cuyas curvas características $B-H$ podrían corresponder a las de la Figura C-20; las cuales, como consecuencia de la aplicación de las respectivas geometrías (caminos magnéticos y secciones transversales de los materiales), se convierten en el gráfico $B \cdot S - H \cdot l$ (o $\phi - N \cdot I$), que se muestra en la Figura C-21.

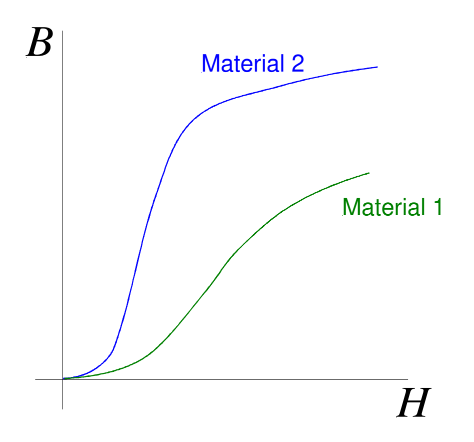


Figura C-20 Curvas de los materiales magnéticos.

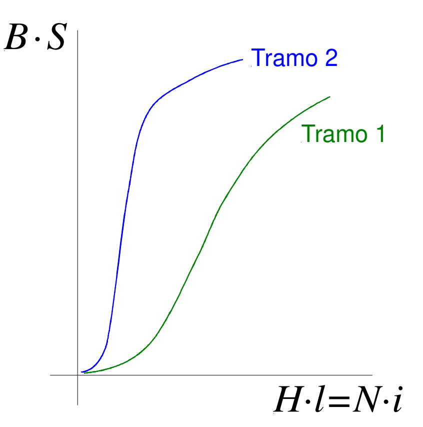


Figura C-21 Características de los elementos del circuito compuestos por los materiales magnéticos de la Figura C-20.

Valga como aclaración indicar en qué consiste "aplicar las respectivas geometrías" para obtener el gráfico $B{\cdot}S - H{\cdot}l$ a partir del gráfico $B - H$. Esta operación consiste en simplemente *multiplicar cada ordenada de la curva* $B - H$ *de cada material por la sección del tramo o rama que lo constituye; mientras que las abscisas de los mismos se multiplican por las longitudes de los caminos medios respectivos*.

Por lo tanto, de la analogía eléctrica, por una parte se puede determinar la "característica de regulación" de la fuente de fuerza magneto motriz "real", conformada por la bobina y el Tramo 1; y por otra, la "reluctancia de carga", conformada por el Tramo 2. En la Figura C-22 se muestra la descomposición del circuito magnético en los dos elementos mencionados y la gráfica $B{\cdot}S - H{\cdot}l$ correspondiente se ve en la Figura C-23.

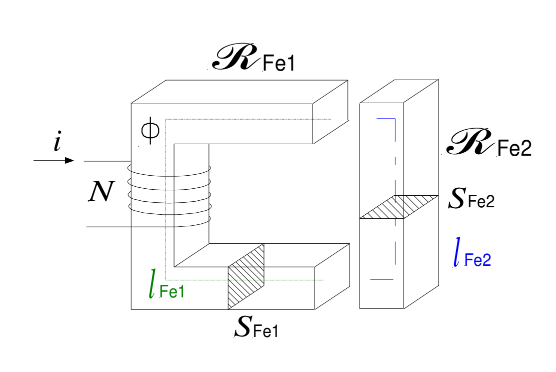


Figura C-22 Circuito magnético separado en su fuente de fuerza megnetomotriz real y su reluctancia de carga.

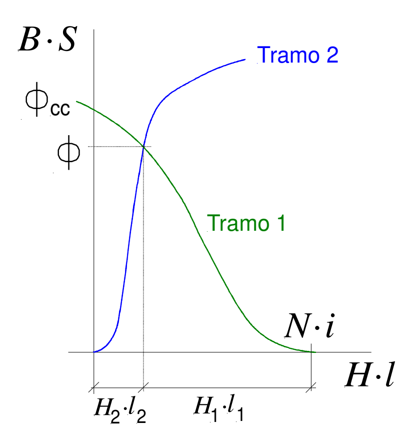


Figura C-23 Característica de regulación de la fuente y de la reluctancia de carga

En la gráfica $B{\cdot}S - H{\cdot}l$ se puede observar que la "característica de regulación" corta al eje horizontal en el valor de la fuente de fuerza magnetomotriz $N{\cdot}i$, y al eje vertical en un valor de flujo que se ha dado en denominar ϕ_{cc} ("flujo de cortocircuito"), el cual debería interpretarse

(análogamente a la corriente de cortocircuito del circuito eléctrico) como *el flujo que se obtendría si la fuente de fuerza magnetomotriz estuviese aplicada a una reluctancia equivalente a la* $\mathcal{R}_{\text{Fe1}}$ *que forme un circuito cerrado*. Por otra parte, la intersección de la característica del Tramo 1 y la característica de regulación determina sobre el eje vertical el flujo ϕ resultante que se establece sobre el circuito; mientras que sobre el eje horizontal, queda definido un punto al cual concurren las "tensiones magnéticas" $H_2{\cdot}l_2$ y $H_1{\cdot}l_1$ correspondientes a los tramos 2 y 1, respectivamente.

El mismo problema se podría haber resuelto sumando las características de los dos tramos de material ferromagnético (dispuestos en serie), en base a las expresiones de las leyes de Hopkinson y de Kirchhoff para circuitos magnéticos. Para el problema en cuestión, se puede plantear la Ec. C-9.

$$N{\cdot}i = H_1{\cdot}l_1 + H_2{\cdot}l_2 = \mathcal{R}_1\phi + \mathcal{R}_2\phi = \left(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2\right)\phi \qquad \text{Ec. C-9}$$

de la cual se puede despejar el flujo, resultando la Ec. C-10.

$$\phi = \frac{N{\cdot}i}{\left(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2\right)} = \frac{N{\cdot}i}{\mathcal{R}_{eq}} \qquad \text{Ec. C-10}$$

donde R_{eq} se obtiene gráficamente mediante la suma "a flujo constante" de las características de los tramos 1 y 2. La expresión "a flujo constante" es análoga a la expresión "a corriente constante" del circuito eléctrico; y gráficamente resulta la Figura C-24.

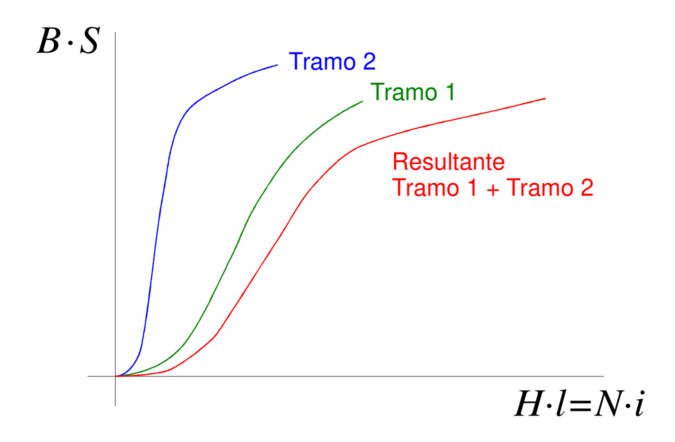


Figura C-24 Determinación de la $\mathcal{R}_{eq}$.

Si en la Figura C-24 se introduce el valor de $N{\cdot}I$ de la fuente de fuerza magnetomotriz, el punto de la resultante sobre el eje vertical representa el valor del flujo del circuito magnético. Los correspondientes valores sobre el eje horizontal de los tramos 1 y 2 para el valor de flujo hallado, resultan las tensiones magnéticas en los tramos 1 y 2, respectivamente. El nuevo gráfico se muestra en la Figura C-25. Lógicamente, estos resultados deben coincidir con los hallados con el método anterior.

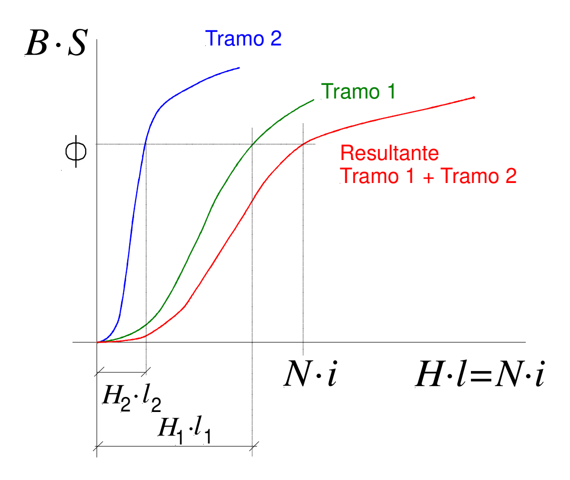


Figura C-25 Tensiones magnéticas.

C.2.2 Circuito magnético compuesto por una fuente de fuerza magnetomotriz y un núcleo magnético de dos mallas y un entrehierro intercalado

El circuito propuesto y el material ferromagnético que lo conforma se muestran en la Figura C-26 y Figura C-27, respectivamente.

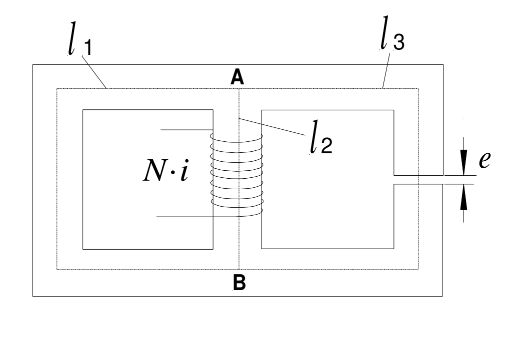


Figura C-26 Circuito magnético propuesto.

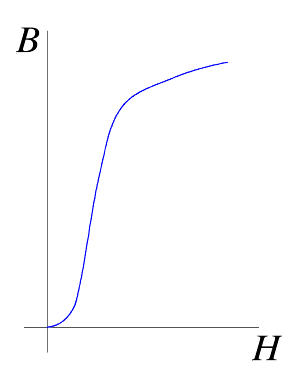


Figura C-27 Característica del material magnético del circuito de la Figura C-26

El circuito magnético de la Figura C-26 tiene su analogía eléctrica en la Figura C-28, cuyo circuito es similar al circuito de la Figura C-7 teniendo en cuenta la resistencia equivalente que se puede obtener a partir de la serie R_2 y R_3.

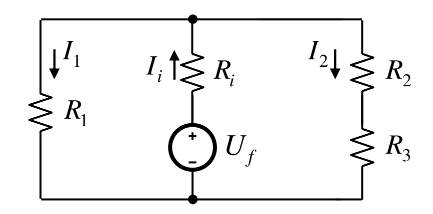


Figura C-28 Analogía eléctrica del circuito magnético de la Figura C-26.

En efecto, para el análisis del presente circuito magnético deberá considerarse la reluctancia de la rama 3 en serie con la reluctancia del entrehierro. A su vez, la resultante de la rama serie anterior se encuentra en paralelo con la rama 1. Consecuentemente, resolviendo de forma adecuada las equivalencias de las ramas según su disposición física original, siempre es po-sible obtener un circuito como los de las Figura C-29 o Figura C-30, según convenga.

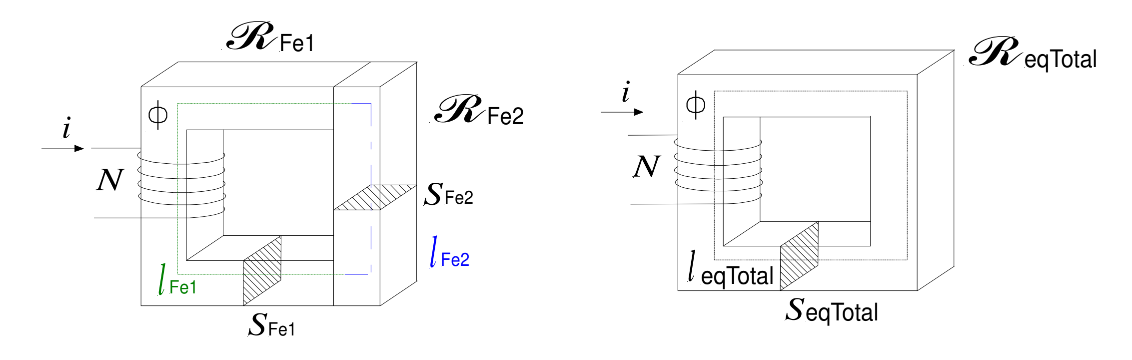


Figura C-29 Circuito magnético equivalente del propuesto, con dos materiales magnéticos.

Figura C-30 Circuito equivalente del propuesto con un solo material magnético.

La resolución del presente problema puede afrontarse analíticamente mediante la aplicación de las leyes de Hopkinson y de Kirchhoff para circuitos magnéticos. Normalmente, en este caso, será necesario aplicar métodos de iteración, al presentar comportamiento alineal el circuito. Por lo tanto, y como ya se dijo oportunamente, la solución gráfica siempre es más conveniente y rápida como una primera aproximación al resultado del problema; luego se podrá efectuar alguna iteración para llegar a un resultado más exacto, si fuera necesario.

Entonces, a partir de la curva características $B-H$ de los materiales, hierro y aire, es posible determinar la característica $B{\cdot}S-H{\cdot}l$ (o $\phi-N{\cdot}I$), como se muestra en las Figura C-31 y Figura C-32.

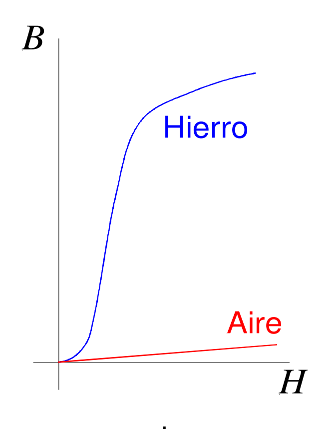


Figura C-31 Características magnéticas de los materiales del circuito

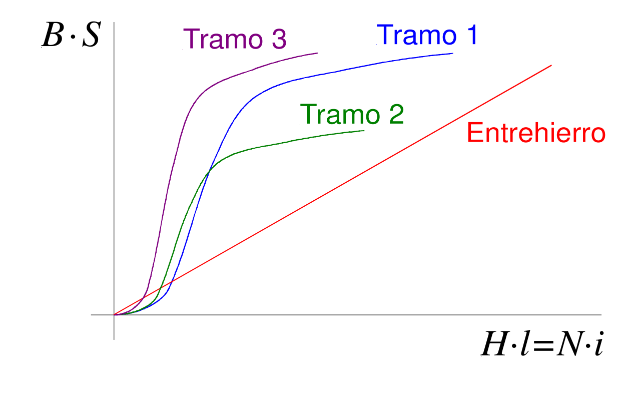


Figura C-32 Características magnéticas de los diferentes tramos del circuito.

Como se observa en la Figura C-32, tanto la apariencia de la característica del hierro, como la del aire se modifican al pasar del gráfico $B-H$ al $B{\cdot}S-H{\cdot}l$ (o $\phi-N{\cdot}I$) por efecto de las geometrías involucradas; obteniéndose tres formas diferentes representativas de cada tramo de hierro, además de la del aire.

A partir de esta situación es posible resolver el problema planteado extrapolando los conceptos estudiados en los casos de circuitos lineales. Observando que el Tramo 2 contiene la fuente de fuerza magnetomotriz, dicha característica podrá dibujarse en el gráfico de forma de representar la "característica de regulación" de la fuente de fuerza magneto motriz "real", conformada por la bobina y el Tramo 2; y por otra, la "reluctancia de carga", conformada por el tramo equivalente conformado por el Tramo 3 en serie con el entrehierro, a su vez en paralelo con el Tramo 1. Esta situación se muestra en la Figura C-33, recordando que las características de los tramos conectados en serie se suman "a flujo constante", mientras que los tramos conectados en paralelo se suman a "fuerza magnetomotriz constante".

La gráfica de la Figura C-33 representa la situación del circuito equivalente de la Figura C-29, donde Tramo 2 + fuente de fmm representa la "característica de regulación", mientras que Tramo 3 + entrehierro // Tramo 1 representa la "característica de carga" equivalente del Tramo 3 en serie con el entrehierro y a su vez en paralelo con el Tramo 1.

Se puede observar uno de los puntos de solución del problema corresponde a la intersección de las características del gráfico de la Figura C-33; en la cual sobre el eje $B{\cdot}S$ se obtiene el flujo del Tramo 2, y sobre el eje $H{\cdot}l$, la tensión magnética en el mismo; así como la tensión magnética en el tramo equivalente restante, como se muestra en el mismo gráfico. Se debe observar, que la suma de las tensiones magnéticas en los tramos pasivos, debe ser igual a la fuente de fuerza magnetomotriz, de tal forma que se cumpla la ley de Kirchhoff para circuitos magnéticos (Ec. C-9).

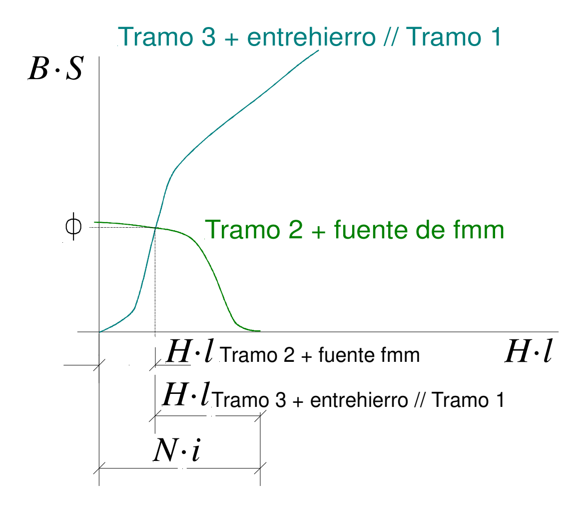


Figura C-33 Combinación de las diferentes características de los tramos.

$$N \cdot i = H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 = \mathcal{R}_2 \phi + \mathcal{R}_3 \phi = \left(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \right) \phi \qquad \text{Ec. C-11}$$

En la Ec. C-11 se denomina $H_2 \cdot l_2$ a la tensión magnética en el Tramo 2 + fuente de fmm y $H_3 \cdot l_3$ a la tensión magnética en el Tramo 3 + entrehierro // Tramo 1. De la misma forma de la misma forma se identifica a las respectivas reluctancias.

Otros puntos que son solución del problema se pueden obtener del gráfico completo, es decir aquél en el cual se representan las curvas características de todos los tramos del circuito, tal como se muestra en la Figura C-34, además de las características equivalentes.

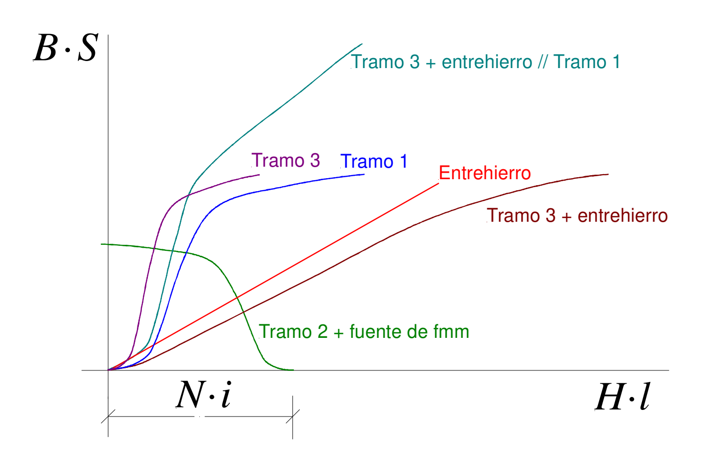


Figura C-34 Características de todos tramos y equivalentes.

Queda como ejercicio para el lector identificar los flujos y las tensiones magnéticas en cada tramo del circuito, incluido el entrehierro.

Asimismo, el lector deberá verificar la aplicación de las ideas introducidas para circuitos lineales en los diferentes casos de circuitos magnéticos posibles. Por lo tanto, se recomienda enfáticamente adquirir solvencia en la resolución gráfica de circuitos lineales, para facilitar la extensión de dichas ideas al caso de la resolución de circuitos no lineales.

Bibliografía ampliatoria

Alexander-Sadiku. (2002). *Fundamentos de Circuitos Eléctricos.* México: Mc Graw-Hill.

Boylestad. (2004). *Análisis Introductorio de Circuitos*. México: Pearson Education.

Carlson. (2001). *Circuitos*. México: Thomson Learning.

Dorf. (1995). *Circuitos eléctricos*. México: Alfaomega.

Edminister. (1988). *Circuitos eléctricos*. Serie Schawm. México: McGraw-Hill.

Hart. (2001). *Electrónica de potencia*. Madrid: Prentice Hall.

Hayt-Kemmerly. (1995). *Análisis de circuitos en ingeniería*. México: Mc Graw-Hill.

Faradje-Kahn. (1976). *Apuntes de electrotecnia general.* La Plata: Ceilp

Jhonson-Hilburn-Jhonson. (1991). *Análisis básico de circuitos eléctricos*.
México: Prentice Hall.

Netushil-Strajov. (1963). *Principios de electrotecnia*. Argentina: Nuestro Tiempo.

Nilsson. (1995). *Circuitos eléctricos*. Massachusetts: Addison-Wesley.

Nilsson-Riedel. (2005). *Circuitos eléctricos*. Madrid: Pearson Prentice Hall Pearson Educacion.

Pueyo-Marco. (2002). *Análisis de modelos circuitales*. México: Alfaomega.

Rizzoni. (2002). Principios y aplicaciones de ingeniería eléctrica. Bogotá: McGraw-Hill.

Sanjurjo-Lázaro-de Miguel. (1997). Teoría de circuitos eléctricos. España: McGraw-Hill.

Scott. (1990). *Introducción al análisis de circuitos*. Bogotá: McGraw-Hill.

Skilling. (1962). *Circuitos en ingeniería eléctrica*. México-Barcelona: CECSA.

Sobrevila. (1976). *Circuitos eléctricos y magnéticos*. Buenos Aires: Marymar.

Sobrevila. (1985). *Ingeniería de la energía eléctrica*. Buenos Aires: Marymar.

Spinadel. (1982). *Circuitos eléctricos y magnéticos. Temas especiales*.
Buenos Aires: Nueva Librería.

Zeveke-Ionkin. (1963). *Principios de electrotecnia*. Argentina: Nuestro Tiempo.

Los autores

Pablo Morcelle del Valle

Es Ingeniero en Electrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) habiendo desarrollado su actividad profesional en el ámbito de dicha Facultad y en diversas empresas del sector privado en forma ininterrumpida desde 1985. Desde fines de 1994 y hasta el presente, forma parte del plantel profesional del Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos - Laboratorio de Alta Tensión, Universidad nacional de La Plata (UNLP); desempeñándose en la realización de estudios, peritajes y atención de ensayos sobre material eléctrico de baja, media y alta tensión; incluyendo tareas de calibraciones de instrumental y mediciones especiales. Ha realizado diversos cursos y seminarios relacionados con las especialidades eléctrica y electrónica, así como en actividades vinculadas a la gestión de la calidad y temas docentes. Cuenta con numerosas publicaciones presentadas en congresos, encuentros, jornadas y seminarios, relacionadas con las tareas desarrolladas en el ámbito académico; tanto docente como profesional. Es docente universitario en la Facultad de Ingeniería de la UNLP desde el año 1987, revistando actualmente y desde 2006 como Profesor Adjunto Ordinario con Dedicación Exclusiva en la cátedra de Electrotecnia y Electrónica, correspondiente a las carreras de Ingeniería Mecánica, Electromecánica, Industrial y Computación, de la mencionada Facultad. Participa en actividades de gestión universitaria como miembro de la Comisión Asesora de Investigación, Transferencia y Extensión de la Facultad de Ingeniería de la UNLP desde el año 2014 y desde 2018 se desempeña como Director Ejecutivo del Departamento de Electrotecnia de la misma facultad. Es miembro titular del Subcomité de Aisladores y Alta Tensión del Instituto Argentino de Normalización y Certificación (IRAM) desde el año 2014.

Marcos Deorsola

Es Ingeniero en Telecomunicaciones de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata habiendo desarrollado su actividad profesional en el ámbito de dicha Facultad en forma ininterrumpida. Inicia como docente auxiliar en 1968. Como Profesor Adjunto desde 1979, es responsable de la creación, organización y atención de la cátedra Electrotecnia I en 1982. Profesor Titular Interino en 1983 y Ordinario en 1986. A partir de 1992, Profesor Titular Ordinario de Teoría de circuitos I y Electrotecnia y Electrónica (sucesivamente para las carreras de Ingeniería Electricista, Electrónica, Mecánica, Electromecánica, Industrial y Computación, de

la mencionada Facultad) hasta su jubilación en julio de 2016. Ha realizado cursos y seminarios relacionados con las especialidades eléctrica y electrónica y vinculados a diversos temas docentes. Participó de actividades de gestión universitaria: Coordinador docente del Área Básica de las carreras de Electricista y Electrónica (1994 a 2015) y Coordinador del Proyecto FOMEC 096: "Mejora de la enseñanza universitaria en Ingeniería Eléctrica y Electrónica como proceso integrado de docencia, postgrado, investigación y extensión" (1996 a 2005) en el Departamento de Electrotecnia, Facultad de Ingeniería, UNLP y Miembro de la Comisión Asesora de Enseñanza (1998 a 2008) de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Realizó apoyo a la investigación en Fisiología, Hidráulica y Física de líquidos biológicos a través del desarrollo de instrumental de medición. Formó parte del plantel profesional del Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos cumpliendo tareas de estudios y atención de ensayos sobre material eléctrico de baja, media y alta tensión; incluyendo tareas de calibraciones de instrumental y mediciones especiales (1986 a 2011). Ha realizado publicaciones en congresos, encuentros, jornadas y seminarios, relacionadas con las tareas desarrolladas en el ámbito académico; tanto docente como profesional.

Libros de Cátedra

Morcelle Del Valle, Pablo
Circuitos eléctricos : parte 2 / Pablo Morcelle Del Valle ; Marcos Félix Pedro Deorsola.- 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; EDULP, 2020.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-34-1924-3

1. Electrónica Básica. 2. Ingeniería. I. Deorsola, Marcos Félix Pedro. II. Título.
CDD 621.3815

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2020
ISBN 978-950-34-1924-3





